TRACTAMENT DE DADES EXPERIMENTALS
CÀLCUL D'ERRORS

1. Mesura i tractament de dades experimentals

Al fer una mesura, mai podrem donar el resultat en forma d'un nombre real, o un valor exacte. Això és així per múltiples raons. Per exemple, suposem que volem mesurar la longitud d'una vareta:

1) La suposició de que la vareta té una longitud ben definida és una idealització. A vegades, les varetes no són un prisma tallat nítidament, poden tenir imperfeccions.
2) L´aparell de mesura tindrà unes limitacions per construcció. El regle emprat, per més ben construït que estigui, tindrà unes divisions amb un cert gruix per tal que puguin ser vistes per nosaltres. Aquestes divisions estaran separades de forma que serà casual que coincideixi una divisió amb el final de la vareta.
3) El nostre ull tindrà unes limitacions que a més poden variar segons la il·luminació, edat…

Així, el resultat d'una mesura no és un nombre real. És un interval. Podem dir, per exemple: la longitud de la vareta està dins l'interval [27,30 ; 27,40] cm (si el regle té divisions fins al mm). Això ho podem expressar també de la forma: 27,35 ± 0,05 *cm*. L'amplada de l'interval ve donada pels anomenats **errors en la mesura**.

2. Xifres significatives

En una mesura, les xifres significatives són els dígits que es coneixen amb certesa més un dígit que és incert. Per exemple, en el cas de la vareta (27,35± 0,05 *cm*) tindríem 4 xifres significatives. El 2, 7 i el 3 serien exactes i el 5, seria una xifra incerta doncs és la xifra que pot tenir errors.

El nombre de xifres significatives no depèn de les unitats en que expressem el resultat. Per exemple, si en el cas de la vareta ho expressem en *mm*:
273,5 ± 0,5 , continuaríem tenint 4 xifres significatives.

Regles de les xifres significatives:
Regla 1: En els nombres que no tenen zeros, tots els dígits són significatius. Exemple, 4,523 té 4 xifres significatives
Regla 2: Tots els zeros entre dígits significatius, son significatius. Exemple, 70,054 té 5 xifres significatives.
Regla 3: Els zeros a l'esquerra del primer dígit que no és zero serveixen només per fixar la posició del punt decimal i no són significatius. Exemple, 0,0789 té 3 xifres significatives.
Regla 4: En un nombre amb dígits a la dreta del punt decimal, els zeros a la dreta de l'última xifra diferent de zero son significatius. Exemple, 0,0020 té 2 xifres significatives.

3. Tipus d'error

3.1 Error d'una mesura directa

Anomenem mesura directa aquella que s'obté directament de l'aparell de mesura. Per exemple, una longitud amb un regle, el temps amb un cronòmetre, o una intensitat amb un amperímetre.

3.1.1 Quan realitzem la mesura una vegada:

Errors d'imprecisió o sistemàtics $\boldsymbol{\varepsilon_I}$: són deguts normalment al propi aparell de mesura. Sempre que fem una mesura cometem un error de forma sistemàtica. Sempre té el mateix valor.

Aparells analògics: per exemple, una agulla que es desplaça en una escala, un regle. Són aparells que donen una resposta continua. En aquest cas ε_I = *R/2* on *R* és la resolució de l'aparell de mesura o interval entre marques. En un regle típic R= 1mm.

Aparells digitals: aquells que donen una resposta a intervals discrets (típicament posseeixen un indicador (display) numèric). En aquest cas ε_I = *R* i coincideix amb l'increment mínim mostrat per l'aparell. Per exemple: si estem mesurant el pes amb una bàscula digital i té una precisió de fins 1 g, llavor s ε_I *= 1 g=0,001 Kg* .

Per tant, expressarem la mesura com:

$$x \pm \boldsymbol{\varepsilon_I}$$

3.1.2 Quan repetim la mateixa mesura N vegades:

Per donar amb certes garanties el resultat d'una mesura *x*, el que farem és repetir la mesura un número *N* de vegades, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$. Descartem aquells valors que clarament s'apartin de la majoria. Expressarem el resultat de la mesura com

$$x = \bar{x} \pm \boldsymbol{\varepsilon}$$

amb

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$\bar{x}$ es la **mitjana** de les mesures realitzades i el número $\boldsymbol{\varepsilon}$, és l'**error de la mesura**, que arrodonirem en general a **una xifra significativa**. Aquest error es descompon, segons siguin les seves causes en:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon_I} + \boldsymbol{\varepsilon_P}$$

On $\boldsymbol{\varepsilon_I}$, és l'error d'imprecisió ja comentat abans en 2.1, i $\boldsymbol{\varepsilon_P}$ és l'error d'incertesa o probable, que expliquem a continuació.

Errors d'incertesa o probables $\boldsymbol{\varepsilon_P}$: són deguts a factors aleatoris. La suposició de que totes les mesures fetes estan al voltant d'un cert valor (distribució gaussiana), junt amb el tractament estadístic del conjunt *N* de mesures, dona un valor per $\boldsymbol{\varepsilon_P}$

$$\varepsilon_p = \sigma f$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}$$

$$f = \frac{t}{\sqrt{N}}$$

on σ és la **desviació estàndard** i *t* la **funció estadística de Student**. Així f és una funció que depèn del número de mesures N realizat i de la **probabilitat** amb la que volem assegurar que el valor real sigui dins l'interval d'error donat. Si treballem amb una probabilitat del 98%, f es calcula d'acord amb la ***taula 1*:**

N	f	N	f	N	f	N	f
		11	0.6718	21	0.4552	40	0.3196
2	8.984	12	0.6354	22	0.4438	60	0.2586
3	2.484	13	0.6043	23	0.4324	120	0.1807
4	1.592	14	0.5775	24	0.4223	$\to \infty$	$\to 0$
5	1.241	15	0.5538	25	0.4128		
6	1.050	16	0.5329	26	0.4039		
7	0.9248	17	0.5142	27	0.3956		
8	0.8360	18	0.4973	28	0.3876		
9	0.7687	19	0.4820	29	0.3804		
10	0.7154	20	0.4680	30	0.3734		

Taula 1

Nota: les calculadores científiques usuals i/o fulls de càlcul tenen procediments per entrar dades x_1, x_2, x_3,…, x_N i fer els càlculs de $\bar{x}$ i σ. Si és necessari llegiu el manual de la vostra calculadora i/o full de càlcul. Us poden estalviar molta feina.

3.3 Error d'una mesura indirecta:

En els apartats anteriors s'ha vist com obtenir i expressar la mesura d'una variable amb el seu error a partir de mesures directes de la mateixa.
Hi ha situacions en les que s'ha de calcular, amb una fórmula, una variable que depèn d'altres variables que es poden mesurar directament.
Per exemple, suposem que volem calcular la resistència en un circuit a partir de les mesures fetes de la intensitat i la diferència de potencial, mesurades amb un voltímetre i un amperímetre. La fórmula que haurem d'utilitzar és *R=V/I* amb R sent una mesura indirecta i *V* i *I* mesures directes.

Per tant, quan una variable *z* que depèn de diverses variables *x*, *y*,…, es calcula un **error propagat**. L'expressió del càlcul d'aquest error és:

$$\varepsilon_z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} \varepsilon_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} \varepsilon_y + \cdots$$

Que seria la suma de les derivades parcials de la mesura indirecta, *z*, respecte les mesures directes que intervenen, (*x*,*y*,...) multiplicades per l'error de cada mesura directa i les derivades en valor absolut.

$$z = \bar{z} \pm \varepsilon_z$$

Per exemple, en el cas del càlcul de la resistència comentat abans, sabent els errors de les mesures directes *V* i *I*, per obtenir l'error de la resistència faríem el següent:

$$\varepsilon_R = \left|\frac{\partial R}{\partial V}\right|_{\substack{V=\bar{V}\\ I=\bar{I}}} \varepsilon_V + \left|\frac{\partial R}{\partial I}\right|_{\substack{V=\bar{V}\\ I=\bar{I}}} \varepsilon_I = \left|\frac{1}{I}\right|_{\substack{V=\bar{V}\\ I=\bar{I}}} \varepsilon_V + \left|\frac{-V}{I^2}\right|_{\substack{V=\bar{V}\\ I=\bar{I}}} \varepsilon_I$$

$$\varepsilon_R = \frac{1}{\bar{I}} \varepsilon_V + \frac{\bar{V}}{\bar{I}^2} \varepsilon_I$$

3.4 Error relatiu i absolut:

L'error absolut ε_a del valor mig de la variable $\bar{x}$, serà el valor absolut de la diferència entre aquest valor mig i el valor real V_R de la variable, conegut i acceptat.

$$\varepsilon_a = |\bar{x} - V_R|$$

L'error relatiu ε_r serà el quocient $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{V_R}$

4. Presentació dels resultats

Un error es presenta normalment amb **una xifra significativa** (en experiments molt ben fets se'n poden donar dues), que prové de l'arrodoniment **per excés** del valor obtingut després dels càlculs que correspongui fer (sense arrodoniments). Hi ha una excepció: quan la xifra de l'ordre següent al que es manté és zero: 2,01 s'arrodoneix a 2 i no a 3. El valor de la magnitud s'ajusta al mateix ordre de la xifra presentada en l'error, arrodonint simplement.
Per exemple, si els càlculs donen com resultat:

(7,64713 ± 0,3248) u

comencem per ajustar per excés l'error a 0,4, i com això vol dir "dècimes", ajustem a "dècimes" el valor de la magnitud que queda com 7,6. És a dir, presentarem com a resultat final, en les unitats que correspongui (u):

(7,6 ± 0,4) u

Els errors relatius es presenten amb un màxim de tres xifres significatives.
Tots aquests ajustos es fan després dels càlculs; mentrestant es conserven totes les xifres que es pugui.

Convé adonar-se que de tots els càlculs que es facin, el que al final queda és: una xifra per l'error, naturalment en l'ordre adequat, i el valor de la magnitud. Hi ha, per tant gran pèrdua d'informació en el camí, i el que cal inexorablement és donar un resultat amb sentit i una certa estètica.
Si no es presentessin explícitament errors en un càlcul, cal seguir la norma (Tipler p.8) que diu, bàsicament, que el nombre de xifres donades en el resultat d'un càlcul no ha d'excedir el de donades en els valors que intervenen en els càlculs.
Per exemple 2,31 x 5,1 = 11,781, però com que 5,1 es presenta amb dues xifres significatives, el resultat també ha de ser presentat amb dues xifres significatives i serà per tant, 12.

NO OBLIDEU QUE:

- *primer* hem de calcular el valor de la magnitud. Això sol ser fàcil i ràpid i és el més important,
- *després* es calcula l'error, cosa que és normalment més difícil,
- *finalment* donem congruència al conjunt.

5. Ajusts d'una recta a les dades experimentals

Una altra situació força usual és la que comporta trobar la possible dependència entre dues o més variables que es poden mesurar experimentalment de forma independent, els valor de les quals es poden representar gràficament. A través d'aquesta representació, es pot deduir una possible relació algebràica entre variables. A continuació, es tracta la metodologia a seguir en la determinació d'aquesta gràfica:

- La representació es por fer per ordinador o manualment (en aquest darrer cas, és convenient utilitzar paper mil·limetrat).
- Cal triar les escales dels eixos, considerant els valors extrems de X i de Y, de forma que la gràfica ocupi gran part del paper i que les mesures representades quedin, en tot el que sigui possible, uniformement repartides (no s'amunteguin en un extrem, per exemple).
- El punt d'intersecció dels eixos no ha de ser necessàriament el (0,0), pot ser qualsevol altre que faci fàcil la representació (escala amb zero desplaçat).
- S'han de dibuixar tots els punts obtinguts. No s'han d'escriure les coordenades de les dades ni en el eixos ni a prop de cada punt, ja que això dificulta l'observació gràfica.

- La corba resultant de l'ajust del punts experimentals ha de ser continua. Mai s'han d'unir els punts experimentals.
- Si un punt queda clarament separat de la corba, no se l'ha de tenir en compte en l'ajust i s'ha d'assenyalar com a erroni.
- Tota gràfica s'ha d'acompanyar d'un número i d'un peu explicatiu del què representa. Si es fan anar diversos símbols per diferents variables mesurades, és preceptiu indicar quin símbol correspon a cada variable.

El cas més simple és el de dues variables *x*, *y* entre les quals la dependència és lineal. La recta que les relaciona s'anomena **recta d'ajust** i el procediment més usual per obtenir-la, **regressió lineal per mínims quadrats**.
En aquesta situació, disposem d'una sèrie de N mesures $x_1, x_2, \ldots, x_N$ d'una variable *x* i N mesures $y_1, y_2, \ldots, y_N$ d'una variable *y* i "sospitem" que estan aproximadament relacionats per una **funció lineal**:

$$\boldsymbol{y = ax + b}$$

Els paràmetres *a* i *b*, així com la bondat de l'ajust, es determinen utilitzant el mètode dels mínims quadrats, segons el qual els valors d'aquests paràmetres corresponen a una recta que fa mínima la suma de las desviacions quadràtiques,

$$X^2(a,b) = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

Del procés de minimització resulta:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\overline{\boldsymbol{xy}} - \overline{\boldsymbol{x}}\overline{\boldsymbol{y}}}{\overline{\boldsymbol{x}^2} - \overline{\boldsymbol{x}}^2}$$

$$\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{x}}$$

amb

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \qquad \overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 \qquad \overline{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i$$

Podem ajustar qualsevol conjunt de punts a una recta. No obstant, existeix un índex, anomenant coeficient de correlació $|r| \leq 1$ que ens indica la bondat de l'ajust. Aquest coeficient es pot calcular d'acord amb la següent expressió:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\ \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}}$$

Quan més s'ajustin els punts a la hipòtesi de linealitat, més a prop d'1 està r^2. En la pràctica, es considera un bon ajust lineal quan $r \geq 0.95$ i que no es pot ajustar linealment quan $r \leq 0.8$, tot i que aquests límits són discutibles.
Els errors probables i/o d'imprecisió de les mesures de *x* i *y* provoca uns errors probables ε_a i ε_b dels coeficients *a* i *b* que es poden avaluar utilitzant mètodes estadístics:

$$\varepsilon_a = f\sigma_a \qquad \varepsilon_b = f\sqrt{\overline{x^2}}\sigma_b \qquad \sigma_a = \frac{a}{r}\sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}}$$

On la funció f està tabulada a la taula 1.5.1 amb la mateixa interpretació (per al 98%).
Cal notar que si el pendent a és molt pròxim a zero, el mateix li passarà al coeficient de correlació *r* (els dos tenen mateix numerador). En aquest cas, els valors de *y* són independents de *x* i per tant, no té sentit buscar llei que els relacioni.

Nota: les calculadores científiques usuals i/o fulls de càlcul (com l'Excel) tenen procediments per entrar parelles de dades (x_1,y_1), (x_2,y_2),…, (x_N,y_N) i fer els càlculs de *a*, *b* y *r*. Si és necessari llegiu el manual de la vostra calculadora i/o full de càlcul.