ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ ΚΑΡΑΚΩΣΤΑ
ΕΙΡΗΝΗΣ 9 – 59100 ΒΕΡΟΙΑ
tasakarakosta@gmail.com

Θέμα διδασκαλίας: Εμβαδόν τριγώνου – Η εγκυρότητα των μαθηματικών κόντρα στη διαίσθηση

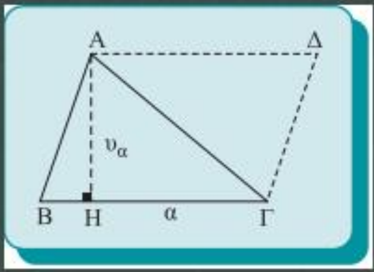
Εισαγωγή

Καμιά μεγάλη ανακάλυψη, ακόμη και στα μαθηματικά, δεν έχει γίνει μόνο με τη λογική. Την αρχή κάνει η διαισθητική σκέψη (η φαντασία παίζει ενεργό ρόλο), η οποία βέβαια βασίζεται στην εποπτεία και στην εμπειρία προηγούμενων γνώσεων. Όμως η διαισθητική σκέψη πολλές φορές μας παραπλανεί. Πρέπει λοιπόν να μπει στον έλεγχο της λογικής σκέψης για να επαληθευτεί ή να απορριφθεί. Η σωστή αναλογία *ενστάλαξης* (έκφραση του Morris Kline) λογικής και διαίσθησης κατορθώνεται με την ανάπτυξη διαλεκτικής σχέσης ανάμεσά τους ώστε να καλλιεργηθεί Σκέψη που θα την χαρακτηρίζει αυστηρή φαντασία και διαισθητικός σκεπτικισμός.
Πολλές φορές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας στο μάθημα της Γεωμετρίας αντιμετωπίζουμε την εξής ερώτηση από τους μαθητές: «*Καλά, αυτό δεν ήταν φανερό από την αρχή; Γιατί πρέπει να αποδείξουμε το αυτονόητο;*» Η ερώτηση αυτή είναι ο πυρήνας της δυσκολίας μας στη διδασκαλία της αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας.

Γι' αυτό το λόγο κατατίθεται η παρακάτω διδακτική πρόταση, με θέμα το εμβαδόν τριγώνου, η οποία χωρίζεται σε δύο σκέλη: α) στην ανάδειξη της αναγκαιότητας της απόδειξης για τον έλεγχο μιας φαινομενικά εύκολης απάντησης[1] β) στα τρίγωνα του Ήρωνα (τρίγωνα με πλευρές και εμβαδόν ακέραιους) για την ανάδειξη του θέματος ότι η λογική σκέψη οδηγεί σε συμπεράσματα που δεν προσεγγίζονται διαισθητικά.

[1] βασισμένη σε άρθρο των Νεγρεπόντη – Φαρμάκη με τίτλο: «Η «παράλογη» αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες»

Θεωρία



Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

$$E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma$$

τύπος του Ήρωνα

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

$E = \tau\rho$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Ασκήσεις

1. **Θεωρούμε ένα τρίγωνο με πλευρές (5, 5, 8) και ένα άλλο τρίγωνο με πλευρές (4.95, 4.95, 7). Ποιο τρίγωνο έχει μεγαλύτερο εμβαδόν?**
   Α) Υπολογίστε το εμβαδόν του καθενός
   Β) Κατασκευάστε τα τρίγωνα χρησιμοποιώντας το λογισμικό Sketchpad και μετρήστε το εμβαδόν.
2. **Ποιο από τα δύο τρίγωνα, το τρίγωνο Α με πλευρές (5,5,8), ή το τρίγωνο Γ με πλευρές (5,5,6), έχει μεγαλύτερο εμβαδόν? Υπολογίστε το[2].**
3. **Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β, γ με α < β < γ αποτελούν μια πυθαγόρεια τριάδα[3] (δηλαδή αν $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$), τότε τα τρίγωνα με πλευρές (γ, γ, 2α) και (γ, γ, 2β), έχουν ίσο εμβαδόν.**
   Έχετε συναντήσει την περίπτωση τριγώνων, όπου ενώ αυξάνεται συνεχώς η περίμετρός τους το εμβαδόν παραμένει σταθερό[4];

---

[2] Ερώτημα που διατύπωσε ο Πρόκλος, αρχαίος σχολιαστής του Ευκλείδη (πρβλ. Πρόκλος, εις Ευκλείδην 403,14-404,14)

[3] Ο Ευκλείδης (330-275 π. Χ.) έδωσε μια μέθοδο εύρεσης Πυθαγορείων τριάδων:

- Αν λ, μ είναι φυσικοί αριθμοί με λ > μ, τότε οι $x=\lambda^2-\mu^2$, $y=2\lambda\mu$, $z=\lambda^2+\mu^2$ αποτελούν μια Πυθαγόρεια τριάδα.
- Αν x, y, z είναι Πυθαγόρεια τριάδα και κ είναι φυσικός αριθμός, τότε οι κx, κy, κz αποτελούν επίσης Πυθαγόρεια τριάδα.

Αργότερα, τον 3ο μ. Χ. αιώνα, ο Διόφαντος απέδειξε ότι, από τις παραπάνω προτάσεις του Ευκλείδη προκύπτουν όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες.

[4] Στις προτάσεις 35η και 37η του πρώτου βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη, αναφέρεται ότι όλα τα παραλληλόγραμμα (αντίστοιχα, τρίγωνα), που ευρίσκονται μεταξύ δύο δοθεισών παραλλήλων γραμμών και με δοθείσα τη βάση τους στη μία από τις δύο παράλληλες, έχουν ίσο εμβαδόν.
Όπως μας περιγράφει με λεπτομέρεια ο αρχαίος σχολιαστής των Στοιχείων του Ευκλείδη Πρόκλος, αυτή η κατάσταση, όπου τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση (Πρόταση 1.37) και συγχρόνως αυθαίρετα μεγάλη περίμετρο, η οποία τείνει στο άπειρο, διατηρώντας συγχρόνως σταθερό το εμβαδόν τους. είχε φανεί παράδοξη στους αρχαίους που δεν είχαν γεωμετρική παιδεία. Αναφέρει ο Πρόκλος τα ακόλουθα: «Στους άπειρους περί την γεωμετρία αυτή η Πρόταση [I.35] θα φαίνονταν 'παντελώς θαυμαστόν', διότι αδυνατεί να αντιληφθεί 'πως είναι δυνατόν να αυξάνεται 'επ' 'απειρον' η περίμετρος, ενώ 'μενει η των χωρίων ισότης'…Έτσι αυτό το θεώρημα και το επόμενο για τρίγωνα [I.37] είναι μεταξύ των καλουμένων ΄παραδόξων θεωρημάτων' στα μαθηματικά. …Τους πολλούς τους 'καταπλήττει' αμέσως το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός του μήκους της πλευράς δεν 'αναιρεί την ισότητα των χωρίων', αν και η βάση παραμένει η αυτή.» (396,10-397,6)

«Ένοχοι μιας τέτοιας παρανόησης είναι εκείνοι οι πολεοδόμοι οι οποίοι υπολογίζουν το μέγεθος μιας πόλης από την περίμετρό της. Και οι συμμετέχοντες στη διαίρεση ενός κτήματος παραπλάνησαν μερικές φορές τους υπόλοιπους … Έχοντας αποκτήσει κτήμα μεγαλύτερης περιμέτρου, το αντάλλαξαν αργότερα με κτήμα μικρότερης περιμέτρου και έτσι, λαμβάνοντας περισσότερα στην ανταλλαγή, κέρδισαν τη φήμη για ανώτερη εντιμότητα.» (403,5-14)

Βιβλιογραφία

"Cynthia Lanius' Fractals Unit." For elementary and middle school grades .
(http://math.rice.edu/~lanius/frac/pages.html),

Peitgen, Jurgens & Saupe (2004). Chaos and Fractals - New Frontiers of Science. Springer-Verlang, New York

C.R. Wall *Terminating decimals in the Cantor ternary set*, Fibonacci Quart. 28,2 (1990) 98-101

http://www.mathacademy.com/pr/minitext/infinity/