

## Projecto Eratóstenes

Disponível na internet desde Setembro de 2000, o projecto que apresentamos já permitiu a milhares de alunos de todo o mundo medir a circunferência da Terra, tal como fez Eratóstenes há mais de 2200 anos. O resumo que se segue apresenta os princípios desta experiência:

Colocamos ao sol uma vara na posição vertical, medimos a sua sombra quando o Sol está no zénite e determinamos o ângulo formado pelos raios solares com a vertical. A seguir, comparamos o resultado com o de outra turma localizada numa latitude diferente. Por fim, uns quantos traçados geométricos e uma simples regra de três são suficientes para determinar o comprimento do meridiano terrestre.

## Um projecto interdisciplinar

Serão abordadas várias disciplinas, muitas vezes de uma forma lúdica, permitindo aos alunos adquirir conhecimentos muito diversificados (a maioria relacionados com os novos programas escolares):

- A história e a geografia: Começaremos por evocar o antigo Egipto para situar Eratóstenes no tempo e no espaço, enquanto que, no final do projecto, procuraremos situar-nos no globo terrestre e localizar um ou mais correspondentes.
- A astronomia: a sombra de uma simples vara permite evidenciar a trajectória do Sol durante o dia e identificar o momento em que está no zénite, observando a seguir a evolução da sua trajectória ao longo das estações.
- A física, claro: estando a luz e a sombra no cerne do projecto, iremos efectuar experiências no terreno, seguidas por simulações de modo a reproduzir o que foi observado.
- A tecnologia também, na medida em que será possível conceber e adaptar os instrumentos necessários: gnómons (primeiros relógios de sol), fios-de-prumo, níveis de bolha, esquadros, quadrantes serão elaborados, concebidos, testados e aperfeiçoados pelos alunos.
- A matemática, claro: nomeadamente a geometria, uma vez que os alunos terão de lidar com linhas paralelas, ângulos, triângulos, círculos, igualdade de ângulos, relações de comprimentos ...
- A linguagem oral e escrita: na medida em que estará na base de todas as actividades, nomeadamente aquelas relacionadas com o processo experimental segundo os princípios do “La main à la pâte” : os alunos formulam hipóteses, propõem experiências, formulam observações e enunciam conclusões, seja oralmente, ou por escrito num caderno de experiências que cada um vai actualizando.
- As técnicas de informação e de comunicação: através da Internet, os alunos efectuem pesquisas sobre documentos, comunicam com parceiros, trocando resultados sobre as medições e os cálculos.
- As artes plásticas, uma vez que este projecto permitirá que cada um revele o seu talento criativo : desenhos inspirados na história de Eratóstenes, bandas desenhadas, maquetas ilustrando experiências, jogos de caligrafia com base em hieróglifos e no alfabeto grego. ...

## Um itinerário flexível

O percurso que propomos representa um percurso ideal que poderá ser adaptado sempre que necessário, tendo em conta as diversas contingências : a idade, o nível e a motivação dos alunos, a importância do grupo, o tempo que deseja – ou pode – dedicar a este projecto, não esquecendo os caprichos da meteorologia... A diversidade das respostas dadas pelos alunos e as suas sugestões serão igualmente tomadas em consideração, na medida em que poderão influenciar, por vezes e de forma inesperada, o decorrer do projecto.

Assim, apesar de serem possíveis alguns atalhos, o projecto deve passar por, pelo menos, 5 etapas:

1. Pôr em evidência de forma conjunta a curvatura da superfície terrestre e o paralelismo dos raios solares;
2. Observar a evolução da sombra produzida por uma vara e determinar a trajectória do Sol;
3. Descobrir o momento do meio-dia solar (ou seja o momento onde a sombra é menor);
4. Utilizar um gnómon para determinar o ângulo formado pelos raios solares com a vertical;
5. Utilizar as anotações de um correspondente e localizar os dois parceiros na Terra para determinar o comprimento do meridiano terrestre.

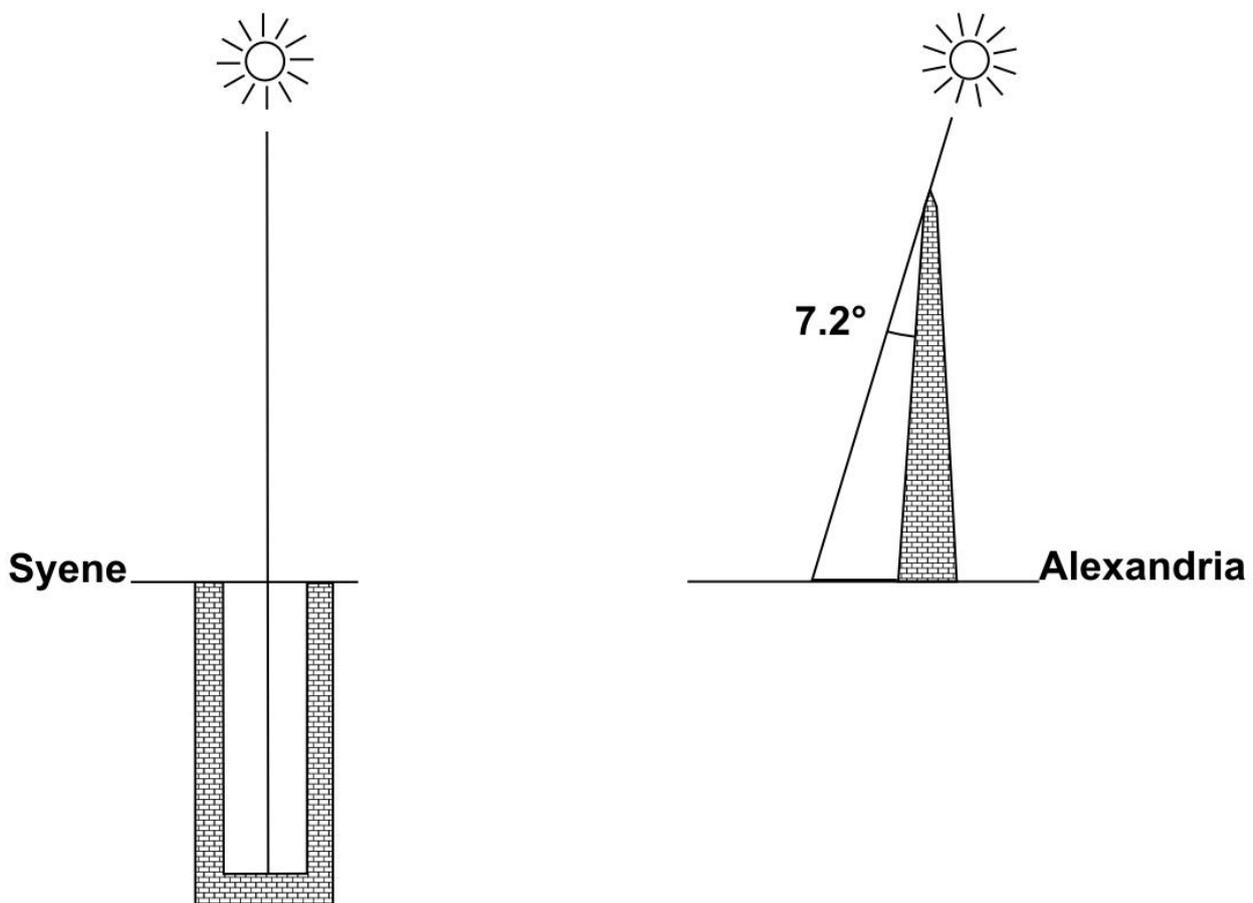
Finalmente, algumas palavras sobre o material necessário: verificará que o material é muito simples e pouco dispendioso, dado tratar-se de material de uso corrente (cartolina, cartão, papel vegetal e milimétrico, parafusos, tábuas, cordéis, lâmpadas eléctricas, bolas, mapa mundo...). Encontrará uma lista no início de cada uma das cinco sequências do módulo pedagógico.

## 1 - As observações de Eratóstenes

Em 205 a.C., o grego Eratóstenes, enquanto Director da Grande Biblioteca de Alexandria no Egipto, propõe um método puramente geométrico para medir o comprimento do meridiano terrestre (circunferência que passa pelos dois pólos).

Irá basear-se na observação de sombras projectadas em dois locais distintos, Alexandria e Siena (actual cidade de Assuão), com uma distância entre elas de 800 km (distância calculada com base no tempo que as caravanas de camelos levavam para efectuar a ligação entre estas duas cidades!), por altura do solstício de verão e ao meio-dia solar local.

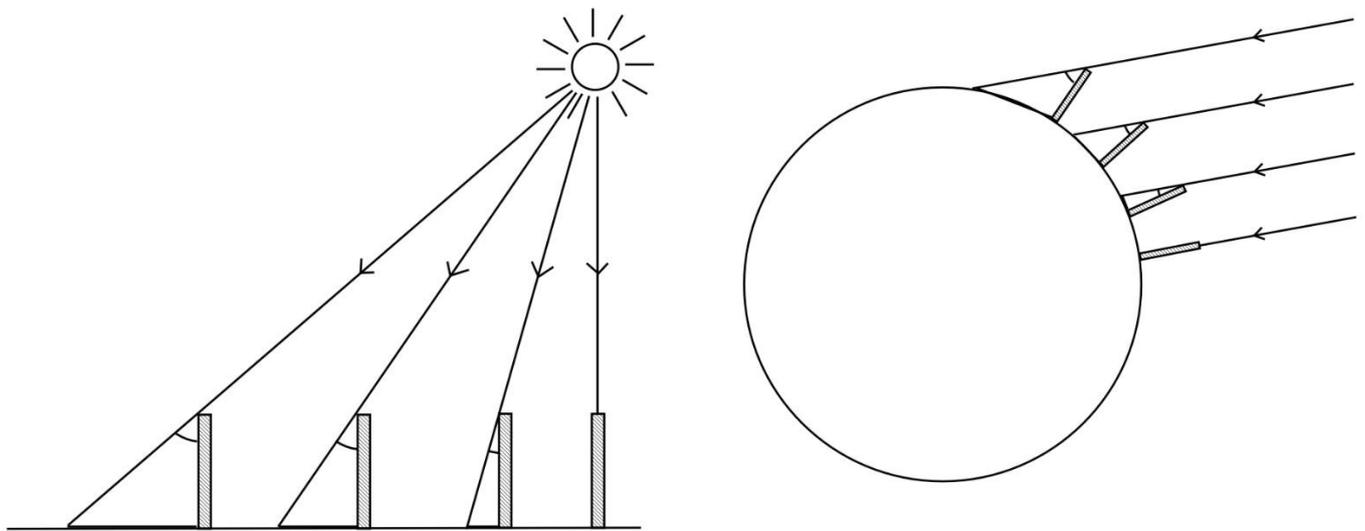
É precisamente nesse dia e a essa hora, no Hemisfério Norte, que o Sol atinge o ponto mais alto acima do horizonte. Todavia, Eratóstenes observou que existiam diferenças de um local para o outro. ...



Em Siena (que se situa aproximadamente no Trópico de Câncer), o Sol está na vertical, iluminando completamente o fundo do poço; por sua vez, as sombras produzidas por objectos na posição vertical estão perfeitamente centradas em redor dos mesmos.

Em contrapartida, em Alexandria, o Sol já não está na vertical e os mesmos objectos apresentam uma sombra descentrada e muito menor. Eratóstenes resolve medir a sombra de um obelisco cuja altura já conhece e determinar deste modo o ângulo formado pelos raios solares com a vertical : encontra um valor de 7,2°

Com base nestas observações, Eratóstenes depara-se com duas hipóteses :



A Terra é plana, mas nesse caso, o Sol estaria suficientemente próximo para que a divergência dos seus raios ao atingir os objectos distantes fosse significativa: com efeito, os objectos cujo comprimento é idêntico produzem sombras com comprimentos diferentes e nenhuma sombra quando o Sol está na vertical (ângulo nulo).

A Terra não é plana, a sua superfície é curva e talvez até esférica. Mas obtemos resultados idênticos com raios solares paralelos entre eles: isto implica que o Sol esteja suficientemente distante, muito, muito distante...

Eratóstenes decidiu seguir a segunda hipótese. De facto, os Antigos já suspeitavam que a Terra não era plana, com base em diversas observações que apontavam para uma certa curvatura da sua superfície:

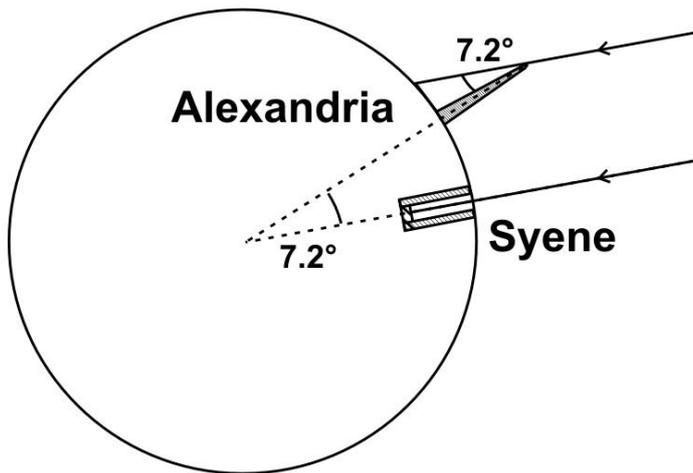
O marinheiro no alto do seu mastro é o primeiro a avistar a costa ao longe;

O observador no alto de uma falésia avista durante mais tempo

O navio que se afasta em direcção ao horizonte do que aquele que ficou na praia; a estrela polar não possui a mesma altura acima do horizonte na Grécia e no Egipto;

Finalmente, durante os eclipses lunares, a sombra projectada da Terra sobre a Lua revela uma forma circular.

Convicto de que a Terra é esférica, o nosso genial Eratóstenes resolve desenhar a sua célebre figura geométrica « magnificamente simples » A figura, que lhe vai permitir calcular facilmente o comprimento do meridiano terrestre! Veja por si mesmo :



Se a Terra for esférica, ao prolongar a linha vertical de Alexandria (obelisco) e a de Siena (o poço), estas duas linhas verticais vão convergir, por definição, no centro da Terra. Por outro lado, Eratóstenes sabia que, estando a cidade de Siena alinhada na direcção Sul em relação a Alexandria, as duas cidades estavam mais ou menos situadas no mesmo meridiano. Estando os raios solares efectivamente paralelos, o ângulo formado pelas duas linhas verticais no centro da Terra é então idêntico ao ângulo calculado com a sombra do obelisco (7,2°).

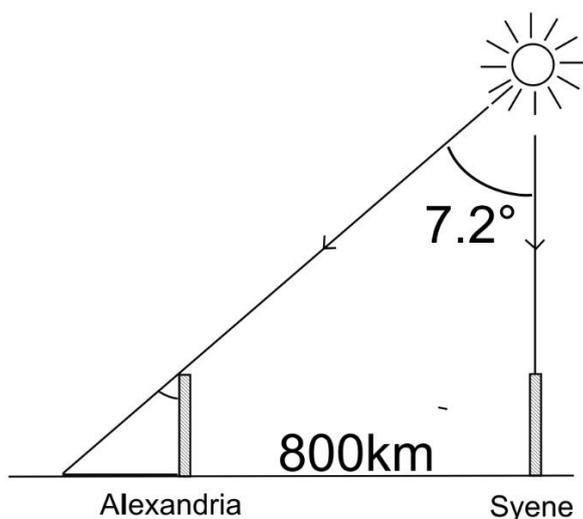
A proporção deste ângulo relativamente aos 360° do círculo é idêntica à proporção da distância que separa as duas cidades (cerca de 800 km) em relação à circunferência do círculo (neste caso, o meridiano terrestre). Consegue adivinhar o que se segue: 360° dividido por 7,2° dá 50, e 800 km multiplicado por 50 dá efectivamente 40 000 km (comprimento que será confirmado mais tarde através de outros processos).

Ângulo (°)	Distância (km)
7.2	800
360	Circunferência



$$C \text{ circunferência} = 360 \times 800 / 7.2 = 40\,000$$

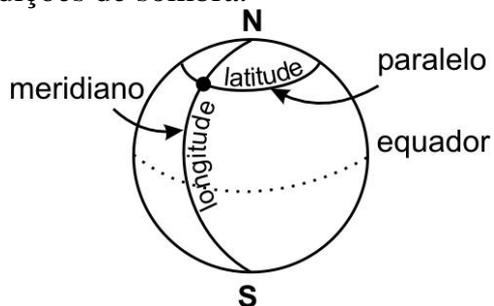
### O canto dos Matemáticos



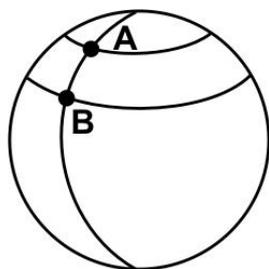
Como já foi referido, as observações feitas por Eratóstenes podem estar associadas à primeira hipótese, ou seja, a de uma Terra plana e de um Sol muito próximo. Alguns dos dados transmitidos por este génio até nos permitem calcular com exactidão a distância a que poderia estar esse Sol. Efectivamente, neste caso, a tangente do ângulo de 7.2° seria idêntica à relação dos 800 km que separam Siena de Alexandria, na distância que separa a Terra do Sol: verificamos assim que o Sol estaria afastado de:  $800 \text{ km} / \tan 7.2 = 6500 \text{ km}$  da Terra (ou seja o valor do raio terrestre), o que é extraordinariamente próximo. Hoje sabemos que que o nosso Sol fica a uma distância de cerca de 150 milhões de Km!

## 2 - Adaptar um projecto experimental à turma

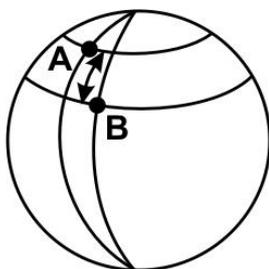
Esta experiência será realizada conjuntamente com outra turma (cujas coordenadas serão fornecidas), não sendo necessário utilizar um obelisco ou um poço! Cada turma necessitará apenas de uma simples vara vertical, de preferência com uma altura idêntica de modo a simplificar o processo de comparação das medições de sombra.



Também não será necessário que uma das turmas esteja localizada no trópico de Câncer! Deverá apenas estar situada numa latitude nitidamente diferente da outra. A recorda-lhe, caso seja necessário, o que representam as duas coordenadas geográficas de um local, ou seja, a sua latitude e a sua longitude.



Se as duas escolas estiverem situadas mais ou menos no mesmo meridiano, melhor... Caso contrário, cada turma verá, alternadamente, o meio-dia solar no seu próprio meridiano!



Além do mais, a figura demonstra que não é a distância entre as duas escolas que será considerada, mas a distância menor que separa as duas paralelas indicando as suas latitudes (verificará que esta distância é facilmente calculada).

Também não será necessário esperar pelo solstício de verão para efectuar as medições! Poderá escolher um dia qualquer do ano, desde que seja o mesmo dia do seu parceiro: deste modo, será conveniente falar com ele e repetir a experiência durante vários dias. O facto de cada turma determinar individualmente o momento do meio-dia solar local (diferente em cada dia do ano e de um local para outro), também não constitui um problema: será apenas necessário identificar a menor sombra produzida na meia hora antes ou depois das 13h00, no horário de Inverno: uma brincadeira de criança... Na condição, é claro, de que o Sol também coopere!

### 3 - Exemplo com duas turmas de Lafrançaise (França) e Meerut (India)

Quinta-feira, 10 de fevereiro, 2011.

Coordenadas das duas cidades:

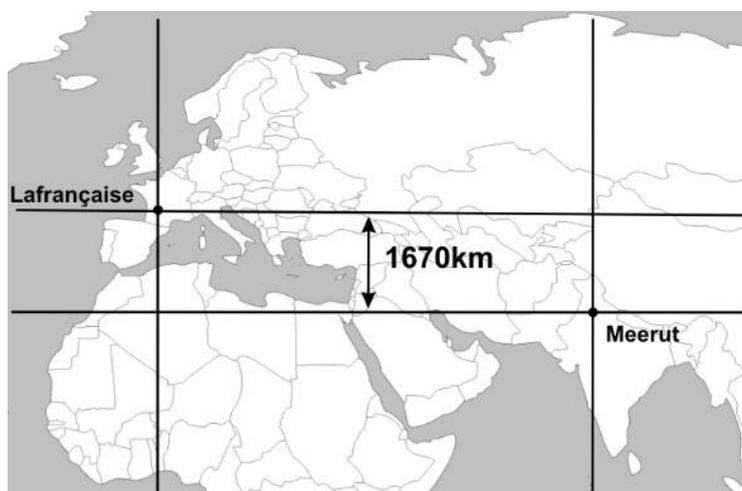
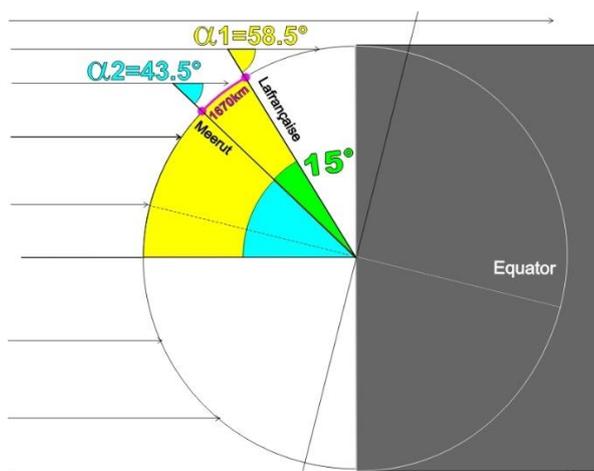
Lafrançaise: latitude  $44^{\circ}08'N$ , longitude  $1^{\circ}15'E$

Meerut, latitude  $29^{\circ}00'N$ , longitude  $77^{\circ}42'E$ .

Estas medições permitiram aos alunos determinar, com uma precisão de meio grau, o ângulo dos raios do Sol (aquando o meio-dia solar local) com base num traçado geométrico muito simples:

Encontraram para Lafrançaise  $\alpha_1 = 58.5^{\circ}$

E para Meerut  $\alpha_2 = 43.5^{\circ}$ .



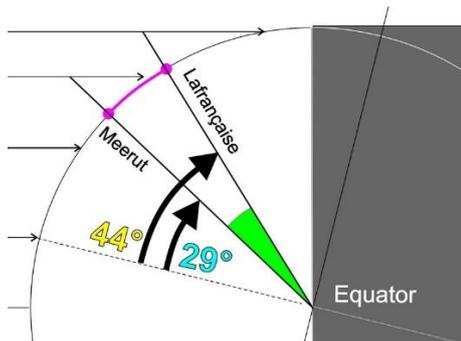
Mas como será possível, com base nestes dois ângulos, determinar o famoso ângulo  $\alpha$ ? Basta subtrair o ângulo  $\alpha_2$  ao ângulo  $\alpha_1$ , o que dá  $15^{\circ}$ .

Uma vez que as duas escolas parceiras não estão situadas no mesmo meridiano, é necessário determinar a distância menor entre a linha paralela de Lafrançaise e a de Meerut. É muito simples: utilizando um mapa, desenhemos cuidadosamente as duas linhas paralelas e, utilizando a escala do mapa, calculamos a distância entre elas. Neste caso, o valor encontrado aproxima-se dos 1670 km.

Já possuímos agora os dois elementos necessários para o cálculo do meridiano terrestre segundo o “método Eratóstenes”: o ângulo alfa de 15° e a distância de 1670 km entre as duas linhas paralelas. Sendo a proporção do círculo completo relativamente aos 15° encontrados de 24 vezes (360° dividido por 15°), o cálculo do meridiano efectua-se multiplicando 1670 km por 24, o que dá 40080km... Método eficaz, no caso de as medidas serem as mais exactas possíveis (sobretudo se as latitudes são mais próximas)!

Ângulo (°)	Distância (km)
15	1670
360	Circunferência

$$360 \times 1670 / 15 = 40\ 080$$



Importa saber, como o demonstra a figura, que a diferença entre as duas latitudes nos conduz imediatamente ao famoso ângulo alfa! Com as nossas duas escolas parceiras, isto faz:  $44^{\circ}08' - 29^{\circ}00' = 15^{\circ}08'$ .

Note-se que as medições efectuadas pelos alunos são muito exactas uma vez que os nossos alunos encontraram um ângulo de 15°, o que é muito próximo..

Insistimos no facto de que o método « directo » de cálculo do ângulo alfa com conhecimento das duas latitudes não deve ser transmitido aos alunos numa primeira fase. Em contrapartida, poderão utilizá-lo, a posteriori, para detectar eventuais erros nas suas medições...

#### 4 - Fases de implementação do projecto

Seguindo os princípios do « La main à la pâte », deverá assegurar-se de que é concedido um lugar fundamental à reflexão dos alunos: deverá incentivá-los a formular hipóteses que terão de verificar, imaginando experiências apropriadas. Cada aluno terá um caderno onde registará, com desenhos ou frases curtas, as suas próprias pesquisas e no qual serão expostos os trabalhos de grupo e os resultados obtidos de um modo colectivo. Poderá assim verificar a boa compreensão dos trabalhos levados a cabo nas aulas e acompanhar a evolução de cada um dos alunos.

As diferentes etapas que propomos são as seguintes:

- 1) Colocação on-line das primeiras sequências, abertura de uma lista de difusão para as escolas envolvidas no projecto. Os investigadores e formadores estarão incluídos nesta lista e estarão disponíveis para responder às perguntas que tiver.
- 2) Ao efectuar o seu registo no projecto, ficará automaticamente inscrito na lista de difusão do projecto Eratóstenes. Poderá deste modo contactar facilmente com os outros professores envolvidos no projecto. Ser-lhe-á atribuída uma palavra-passe que lhe dará acesso a um espaço de trabalho. Este espaço de trabalho permite a cada turma:
  - aceder à área de registo de medições do projecto;
  - aceder às coordenadas de todas as turmas envolvidas no projecto;
  - inteirar-se das suas medições;
  - publicar, consultar e modificar um postal a recordar o projecto;
- 3) Ao longo do ano, as turmas registam as suas medições no espaço de trabalho destinado ao projecto. Podem ser planeadas medidas síncronas utilizando a lista de difusão.
- 4/ No dia 21 de Junho, as turmas reproduzem conjuntamente a experiência histórica que permitiu a Eratóstenes medir a dimensão da Terra há mais de 20 séculos!