



Portofoliul clasei a VI-a – Recreații matematice

*fractAll*

te ajută să înțelegi matematica

## CAPITOLUL IV

# RECREAȚII MATEMATICE

CU *fractAll*

- 1 deschide
- 2 asteaptă
- 3 odiheste
- 4 ia foc
- 5 e o lebadă
- 6 e o treaptă
- 7 e unu mai cu noroc
- 8 dă pe gheață
- 9 e haos și vine
- 10 capăt de șir  
e și legendă  
e și repaos  
lebadă, liră, liniști, delir.

**plus infinitul,**  
el ne atrage privirile-n sus.





*Portofoliul clasei a VI-a – Recreații matematice*

# *fractAll*

te ajută să înțelegi matematica

# fracTall

te ajută să înțelegi matematica

"1 deschide "

## 4.1. “Înșir-te mărgărite” sau șirul numerelor naturale în spirala infinitului

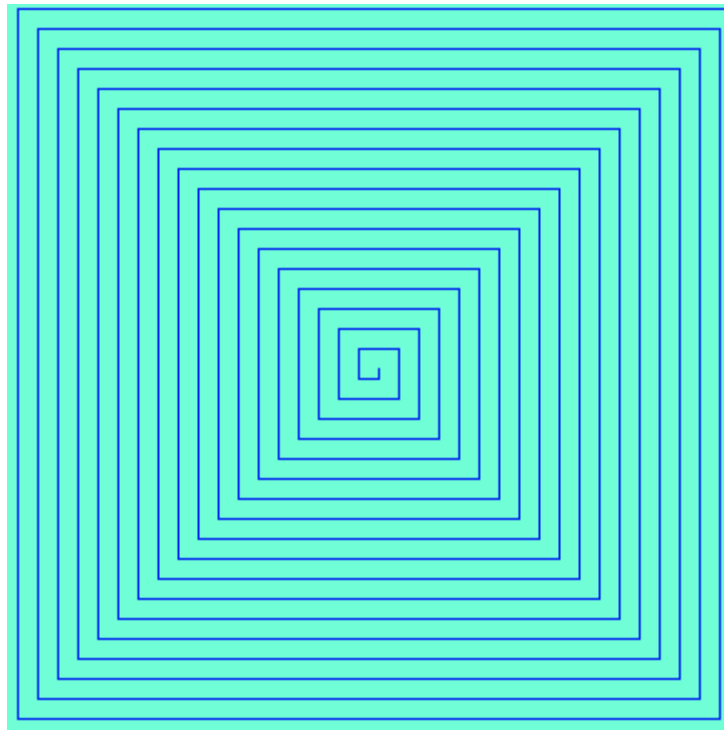
Regula :

- pornim din centru de la un segment de lungime unu 1 u.
- Adaugăm ca în desenul urmator segmente de lungime cu 1 mai mult.

Desenează și tu spirala pas cu pas.

Aplică formula pe care ți-o dă tabelul următor.

Completează în tabel lungimea după formula pe care ți-o dă *fracTall*.

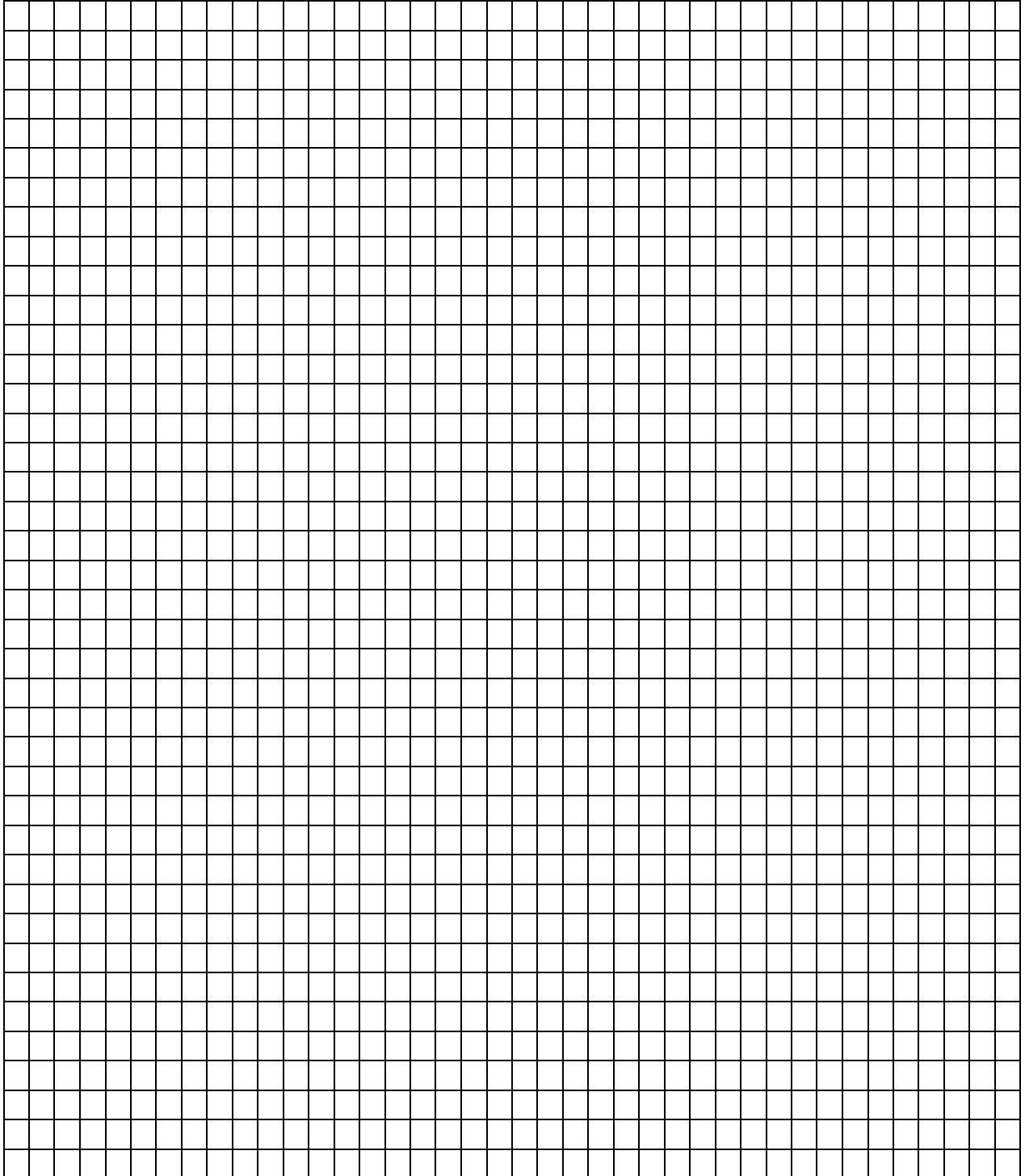




*Portofoliul clasei a VI-a – Recreații matematice*

# fractAll

te ajută să înțelegi matematica





# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Pasul	1	2	3	4	5	6	10	100	1000	n
Lungimea segmentului	1	2	3	4	5	6	10	100	1000	n
Lungimea spiralei	1	3	6	10						

Suma primelor n numere naturale

$$S = 1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$$



# fracTall

te ajută să înțelegi matematica

"2 așteaptă "

## 4.2. " Unde-s doi puterea crește "

Regulă :

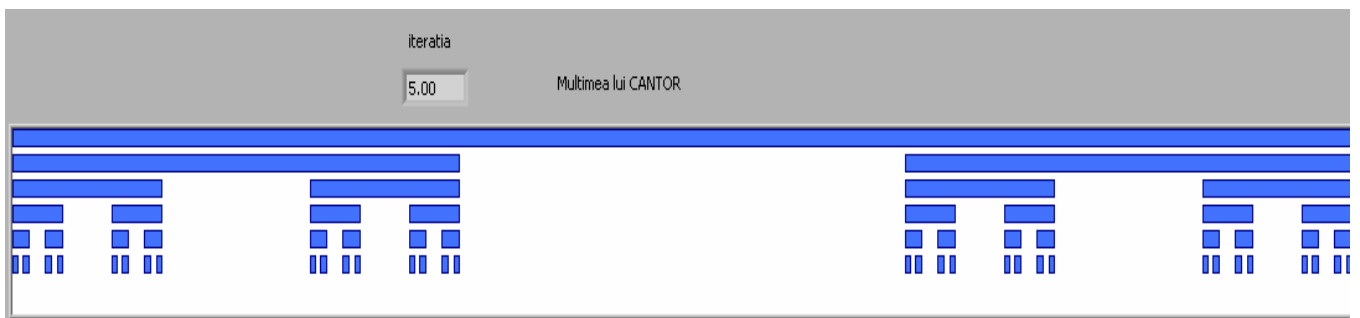
- împărțim dreptunghiul în trei părți egale și "eliminăm " dreptunghiul din mijloc ca în modelul următor.
- Colorăm cele două dreptunghiurile ramase.

Desenează în continuare .

Colorează dreptunghiurile rămase.

Completează tabelul cu numărul dreptunghiurilor

Aplică formula pe care ți-o dă *fracTall*.(suma puterilor lui 2)



**Suma puterilor lui 2**

$$1+2+2^2 +2^3 +2^4 +\dots+2^n=2^{n+1} -1$$



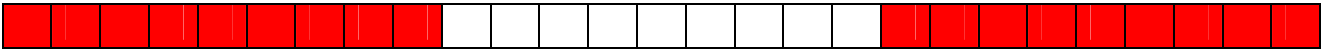
# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Pas 0



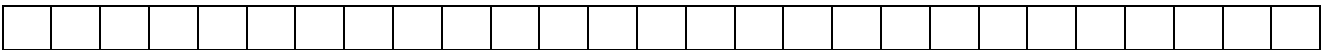
Pas1



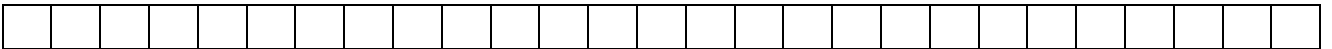
Pas2



Pas 3



Pas4



pasul	0	1	2	3	4	5	6	10	100	n
Număr de dreptunghiuri colorate la acest pas	1	2	4	8	$2^4$					
Număr total de dreptunghiuri colorate	1	$3=$ $2^2-1$	$7=$ $2^3-1$	$15=$						



# fracTall

te ajută să înțelegi matematica

"3 odihnește "

## 4.3. Magia cifrei 3 sau Triunghiul lui Sierpinski

Regulă :

- împărțim fiecare latură a triunghiului în 2 părți egale și "eliminăm " triunghiul central. Colorăm triunghiurile rămase.
- Aplicăm regula anterioară tuturor triunghiurilor obținute la pasul anterior.

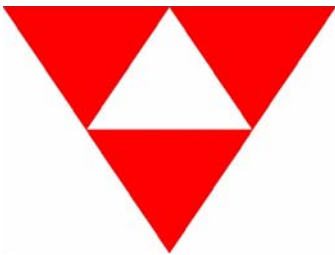
Deseneaza în continuare .

Colorează triunghiurile rămase.

Completeaza tabelul cu numărul triunghiurilor colorate și suprafața lor.

Aplică formula pe care ți-o dă *fracTall*.(suma puterilor lui 3)

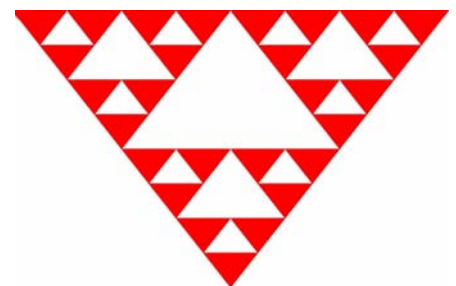
Pas1



pas 2



pas3





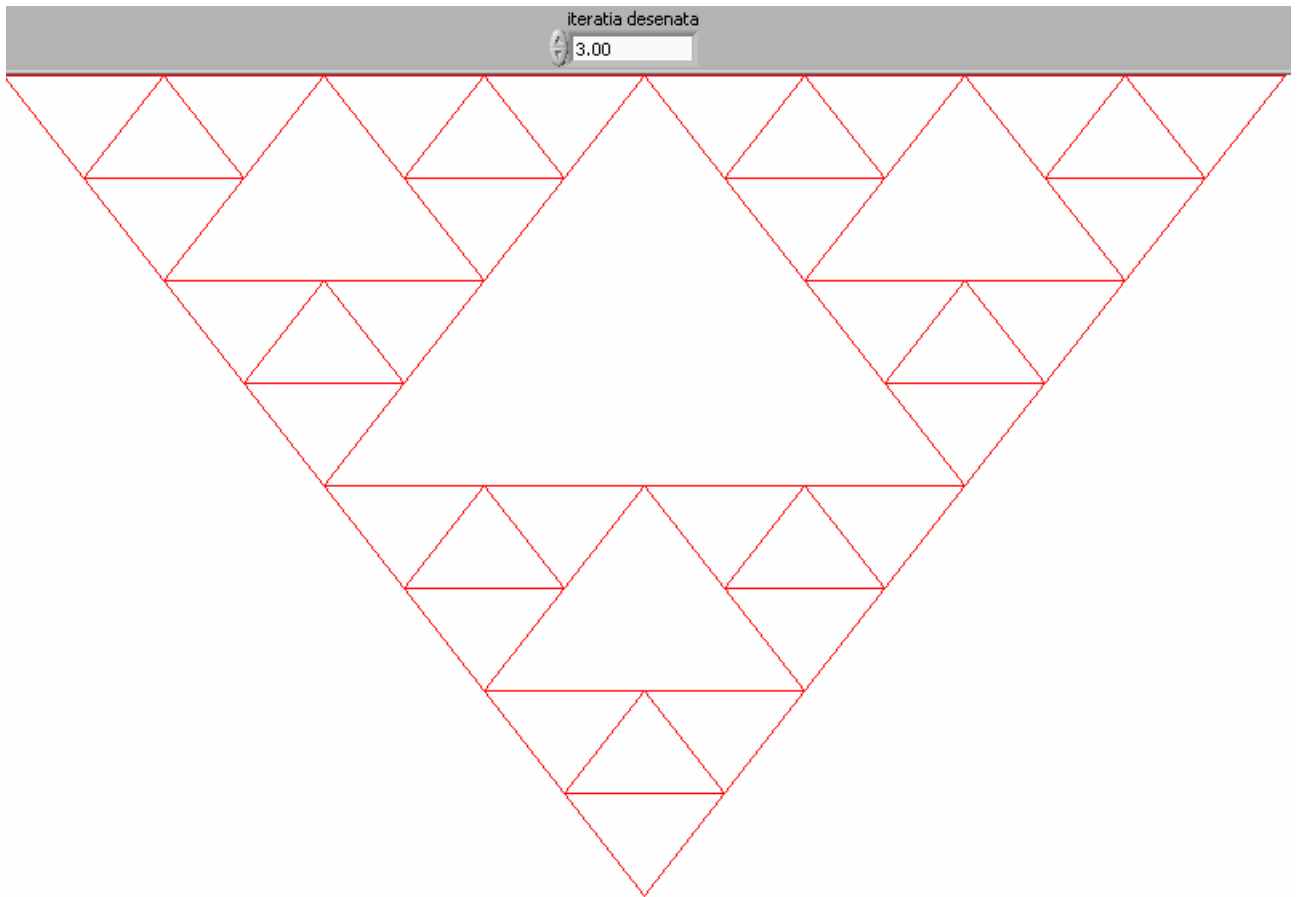


Portofoliul clasei a VI-a – Recreații matematice

# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Colorează și tu triunghiurile rămase la pasul 3 după modelul anterior!

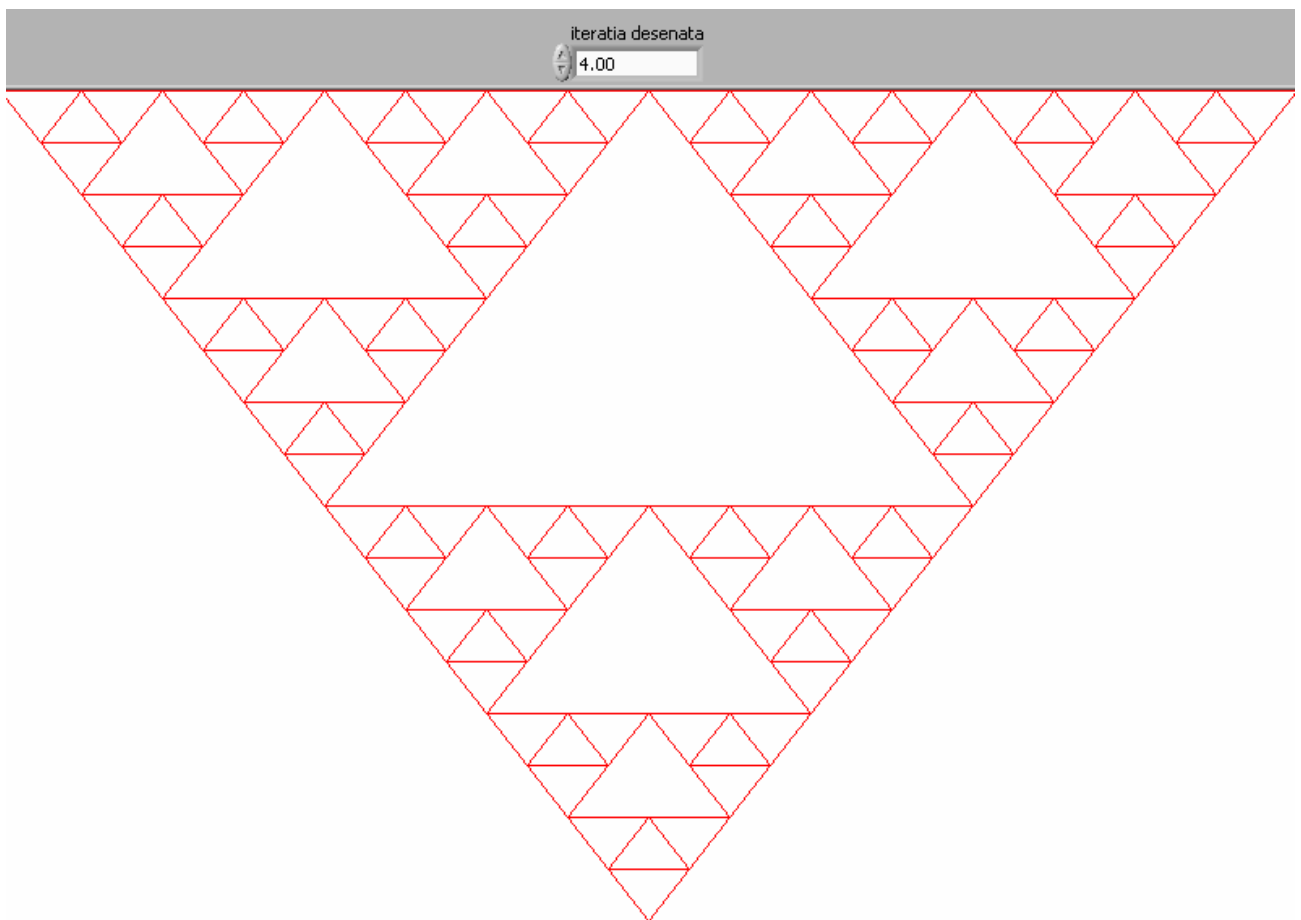




# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Care triunghiuri rămân la pasul 4 ? Colorează triunghiurile rămase !



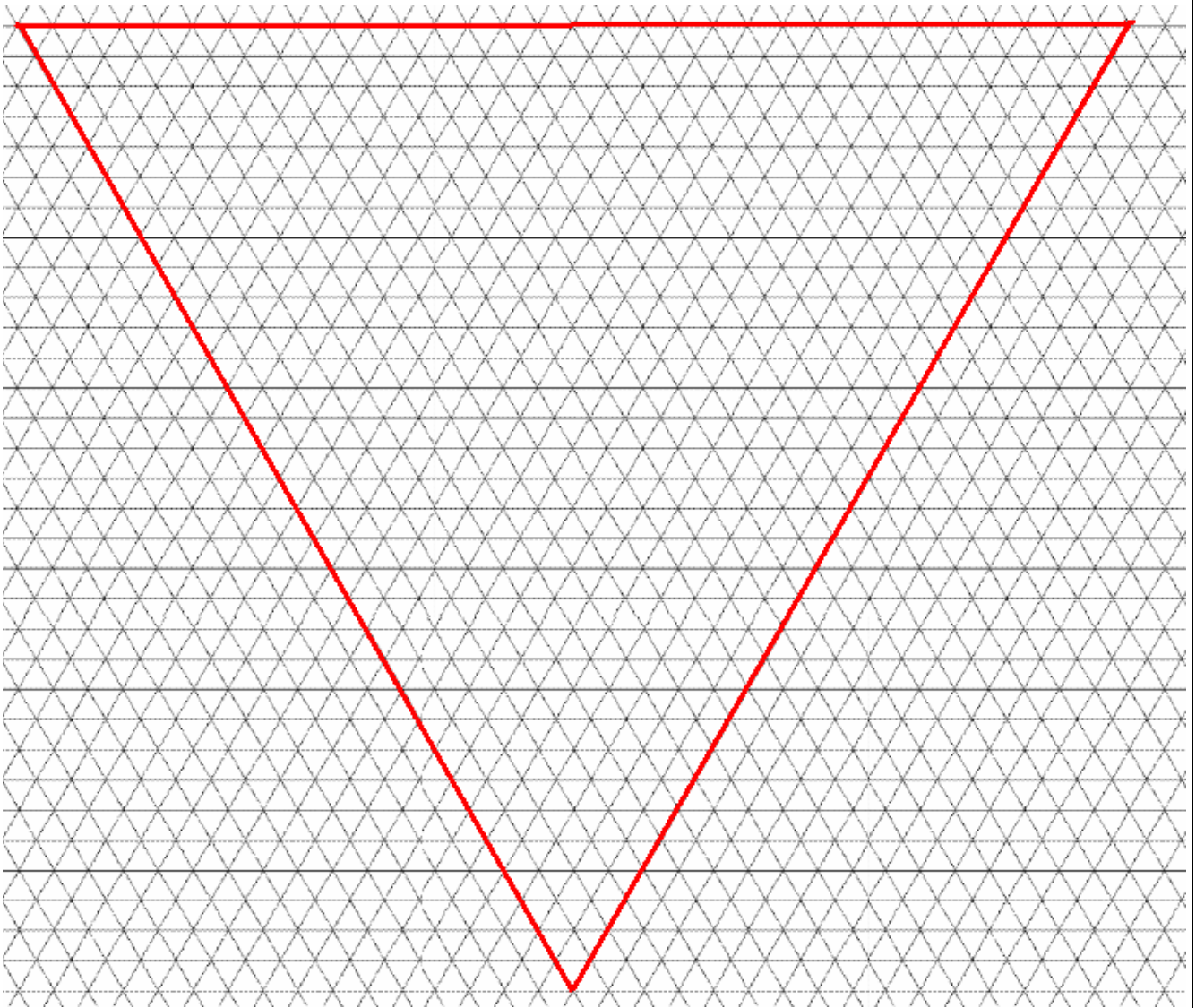


*Portofoliul clasei a VI-a – Recreații matematice*

# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Care triunghiuri rămân la pasul 5 ? Colorează triunghiurile rămase !





# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Dacă latura triunghiului echilateral inițial este  $l$  și aria sa este  $S$   
completați tabelul următor:

Iterația	Număr de triunghiuri ramase	Număr total de triunghiuri existente până acum	Lungimea laturii unui triunghi	Aria suprafetei rămase
0	1	1	$l$	$S$
1	3	4	$l/2$	$\frac{3}{4} S$
2	$3^2$	13	$l/2^2$	$(\frac{3}{4})^2 S$
3				
4				
5				
n	$3^n$	$(3^{n+1}-1):2$	$l/2^n$	$(\frac{3}{4})^n S$

### Suma puterilor lui 3

$$1+3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^n=(3^{n+1}-1):2$$



# fracTall

te ajută să înțelegi matematica

"4 ia foc "

## 4.4. După 3 vine 4 și cu el facem praf un pătrat (Praful lui Cantor 2d)

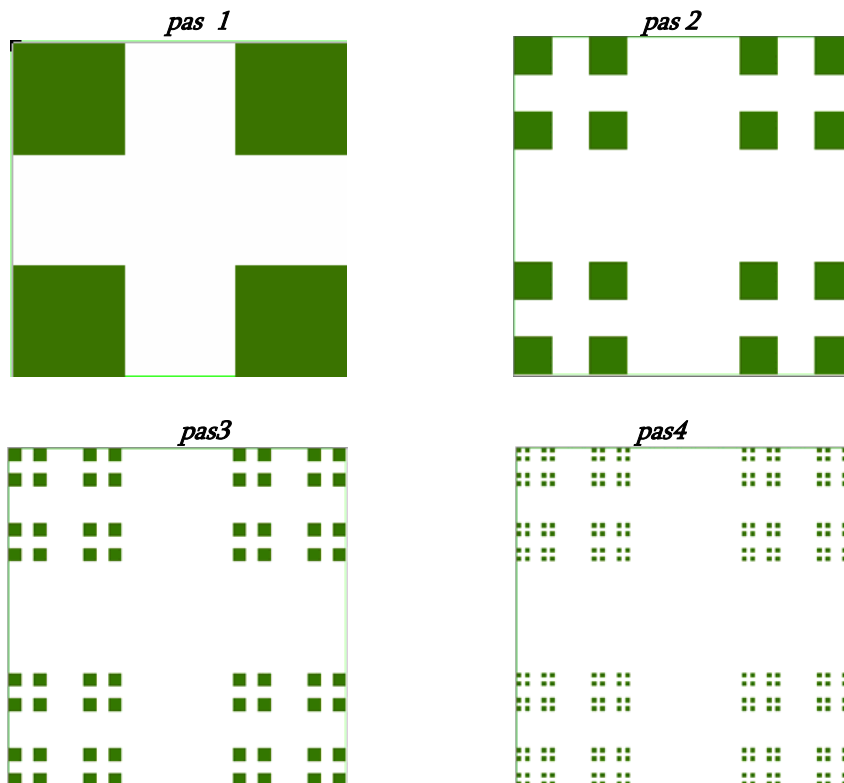
Regulă :

- împărțim fiecare latură a pătratului în 3 părți egale .  
Se obțin 9 pătrate din care păstrăm doar 4 ca în imaginile următoare .Colorăm pătratele rămase.
- Aplicăm regula anterioară tuturor pătratelor obținute la pasul anterior.

Desenează în continuare.

Completează tabelul cu numărul pătratelor colorate si suprafața lor.

Aplică formula pe care ți-o dă *fracTall*.(suma puterilor lui 4)

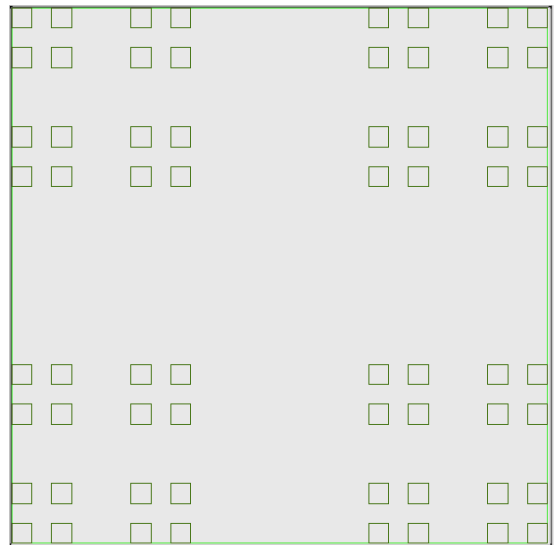
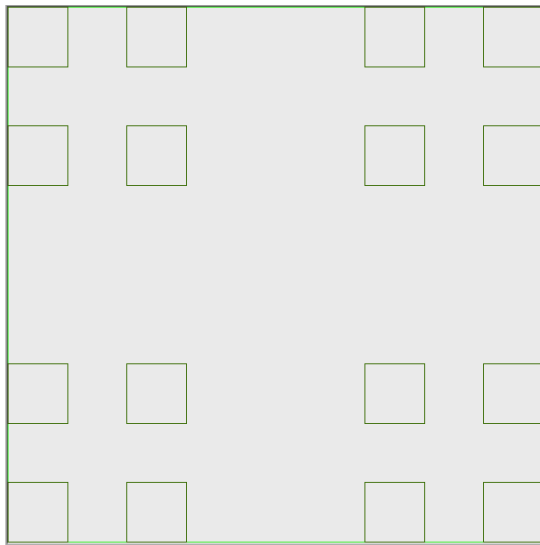




# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Colorează și tu dreptunghiurile rămase la pasul 2 și 3 !

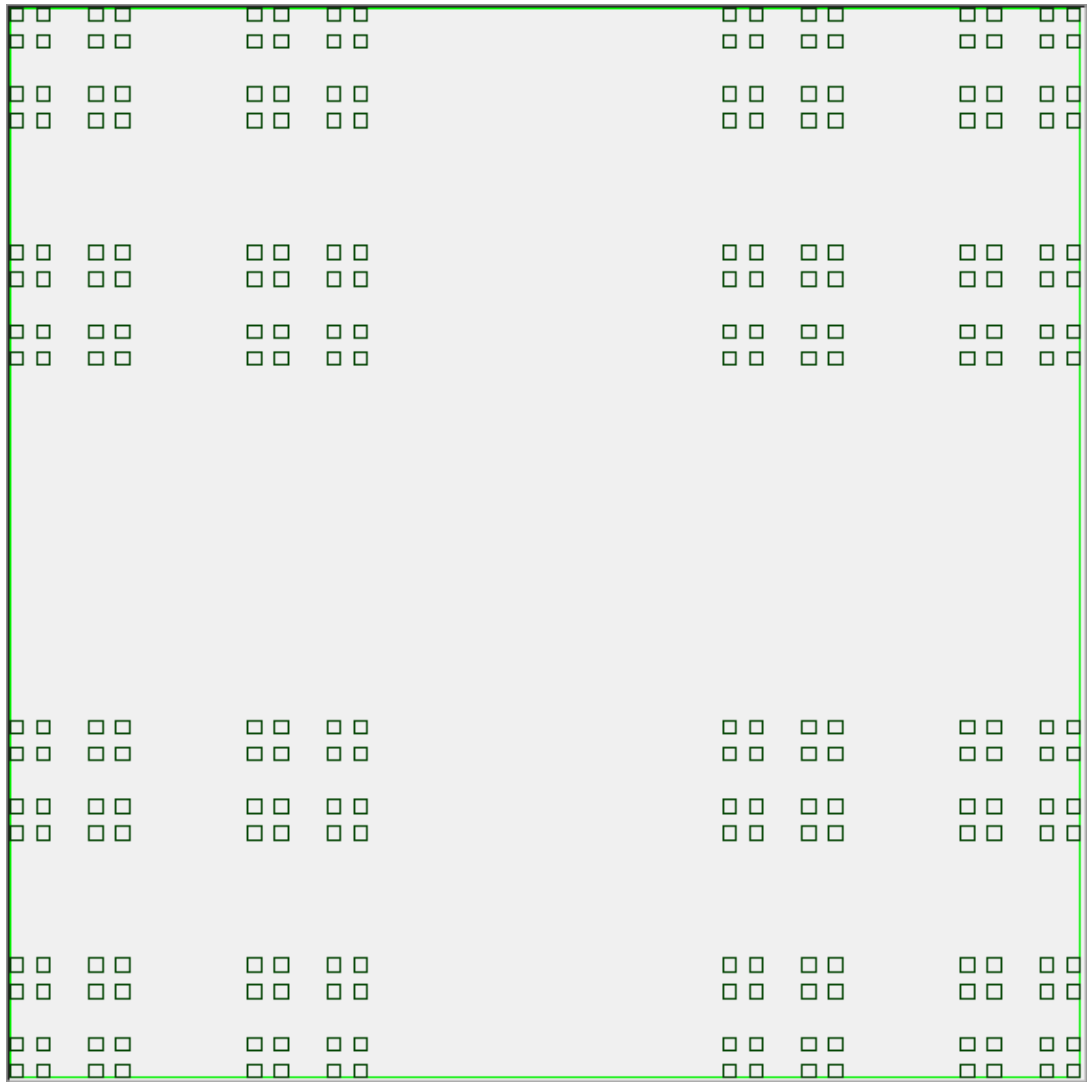




# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Colorează dreptunghiurile rămase la pasul 4 !



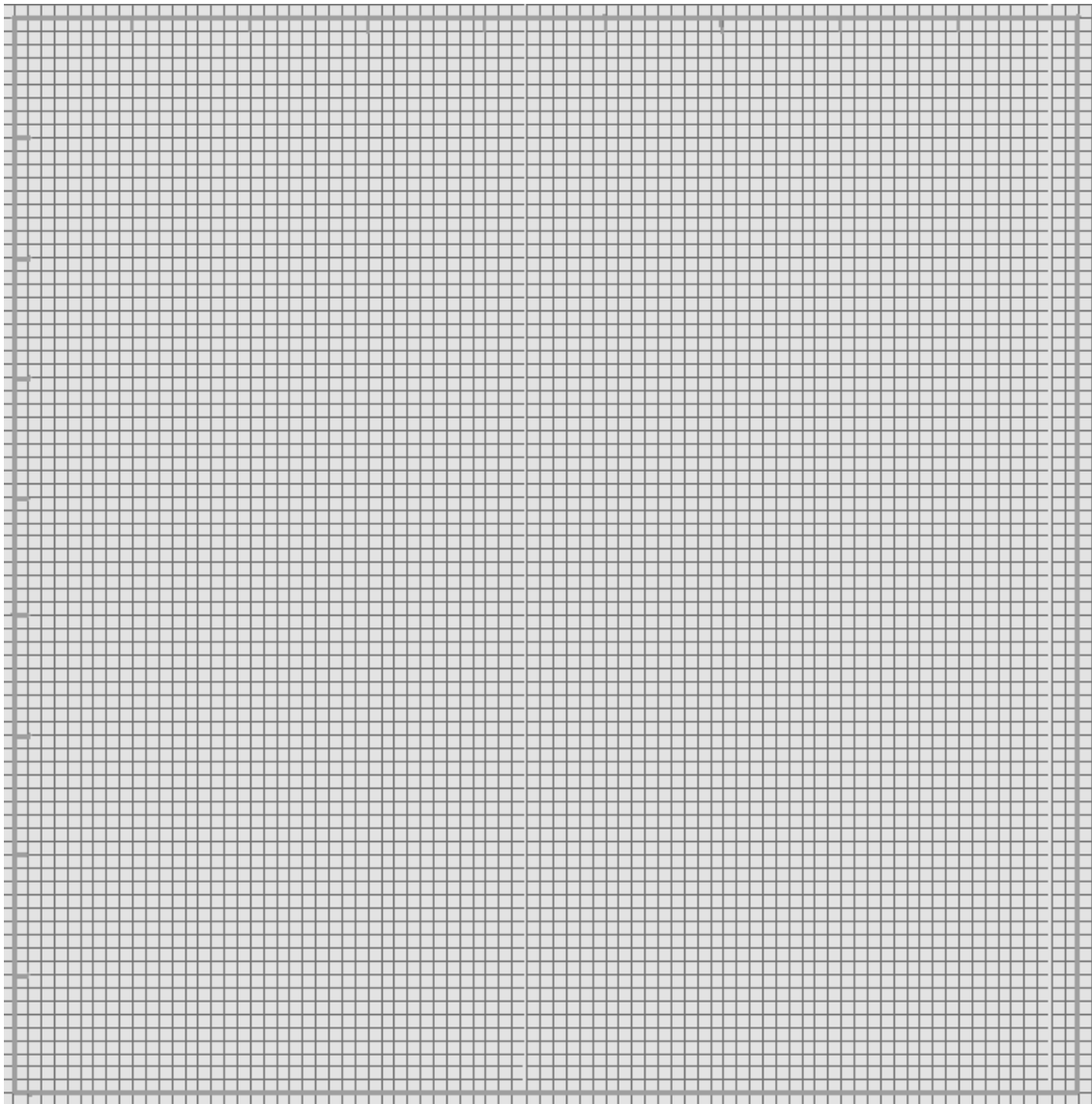


*Portofoliul clasei a VI-a – Recreații matematice*

# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Găsește care sunt pătratele ce rămân după pasul 5 și colorează-le !







# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Dacă latura pătratului inițial este  $l$  și aria sa este  $S$  completați tabelul următor:

Iterația	Număr de pătrate rămase	Număr total de pătrate existente pana acum	Lungimea laturii unui pătrat	Aria suprafeței rămase
0	1	1	$l$	$S$
1	4	5	$l/3$	$4/9 S$
2	$4^2$	21	$l/3^2$	$(4/9)^2 S$
3				
4				
5				
n	$4^n$	$(4^{n+1}-1):3$	$l/3^n$	$(4/9)^n S$

### Suma puterilor lui 4

$$1+4+4^2 +4^3 +4^4 +\dots+4^n=(4^{n+1}-1):3$$



# fracTall

te ajută să înțelegi matematica

"5 e o lebada "

## 4.5. fracTall știe: cu cifra 5 facem o steluță

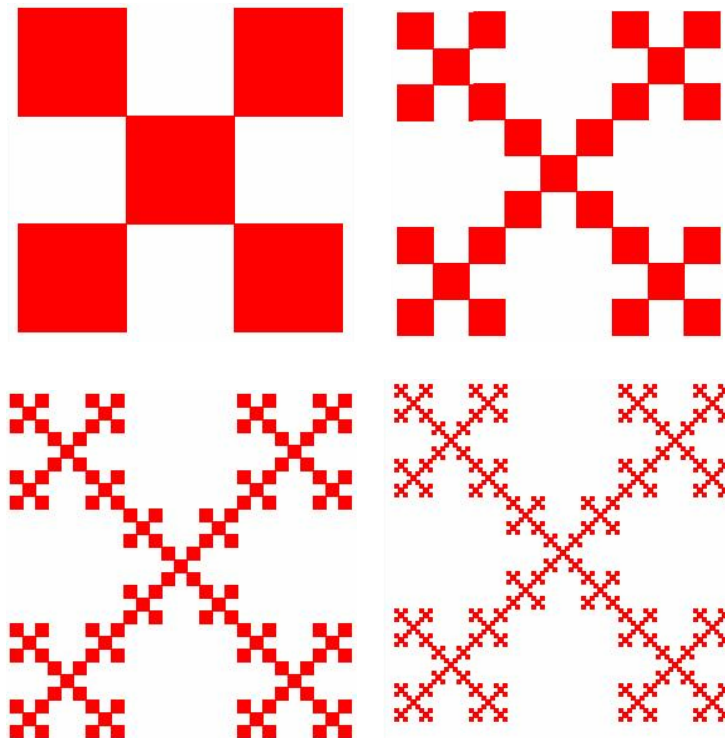
Regulă :

- împărțim fiecare latură a pătratului în 3 părți egale .  
Se obțin 9 pătrate din care păstrăm doar 5 după cum se vede și în imaginile următoare. Colorăm pătratele rămase.
- Aplicăm regula anterioară tuturor pătratelor obținute la pasul anterior.

Desenează în continuare.

Completează tabelul cu numărul pătratelor colorate și suprafața lor.

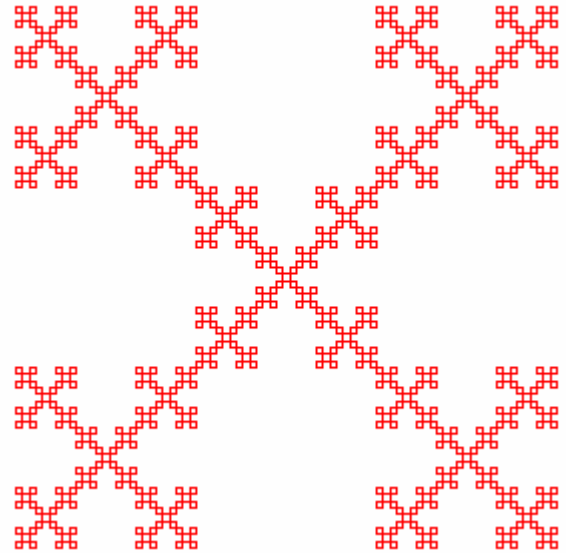
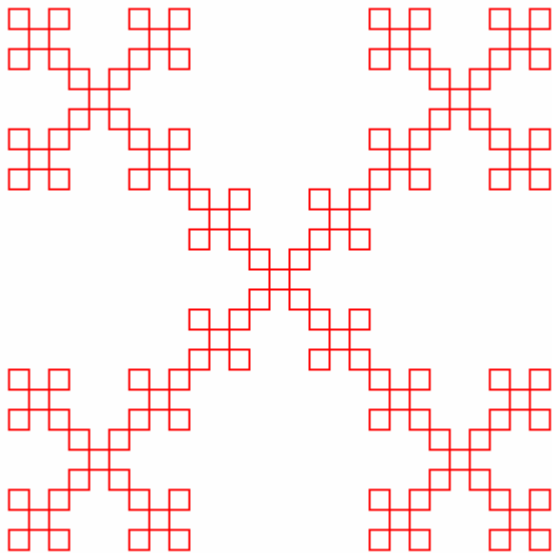
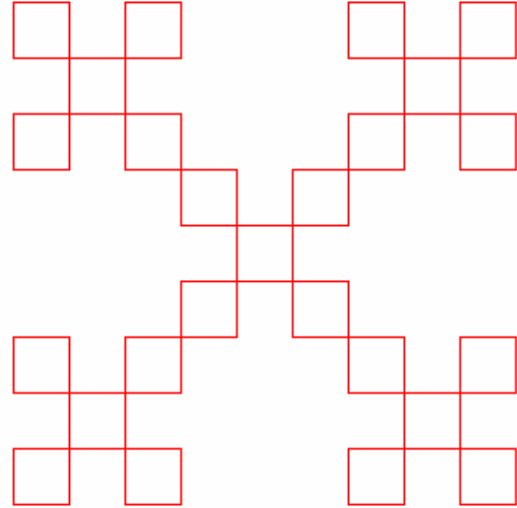
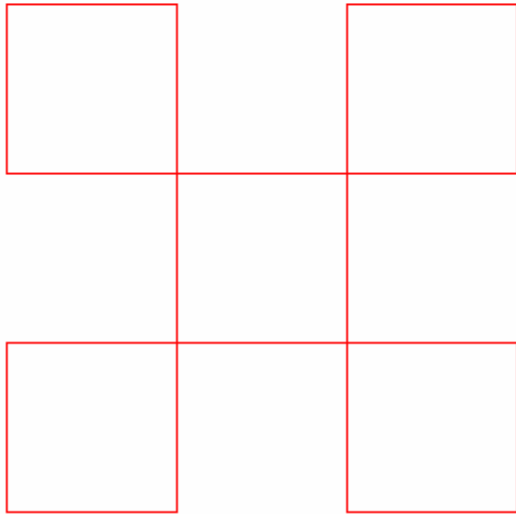
Aplică formula pe care ți-o dă *fracTall* . (suma puterilor lui 5)





# fractAll

te ajută să înțelegi matematica





# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Colorează și tu pătratele rămase la iterațiile 1,2,3,4!

Dacă latura pătratului inițial este  $l$  și aria sa este  $S$  completați tabelul următor:

Iterația	Număr de pătrate rămase	Număr total de pătrate de pana acum	Lungimea laturii unui pătrat	Aria suprafeței rămase
0	1	1	$l$	$S$
1	5	6	$l/3$	$5/9 S$
2	$5^2$	31	$l/3^2$	$(5/9)^2 S$
3				
4				
5				
$n$	$5^n$	$(5^{n+1} - 1):4$	$l/3^n$	$(5/9)^n S$

### Suma puterilor lui 5

$$1+5+5^2 +5^3 +5^4 +\dots+5^n=(5^{n+1} -1):4$$



# fracTall

te ajută să înțelegi matematica

"8 dă pe gheață "

## 4.6. Să desenăm un covor cu cifra 8 (Covorul lui Sierpinski)

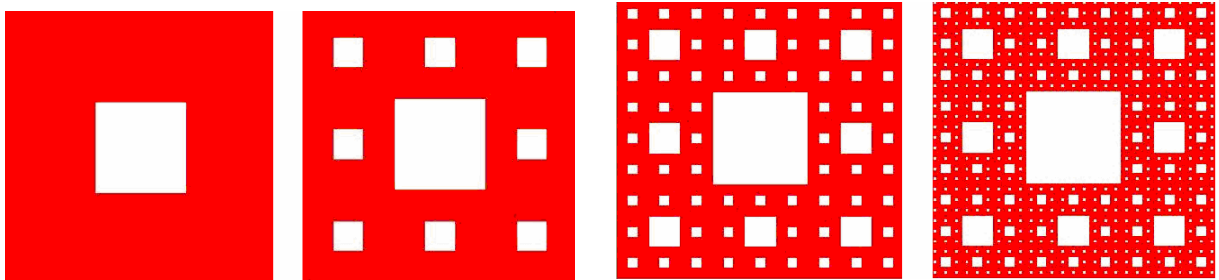
Regulă :

- Împărțim fiecare latură a pătratului în 3 părți egale .Se obțin 9 pătrate din care "eliminăm" pătratul central după cum se vede și în imaginile următoare. Colorăm cele 8 pătrate rămase.
- Aplicăm regula anterioară tuturor pătratelor obținute la pasul anterior.

Desenează în continuare. **Colorează** pătratele rămase.

**Completează tabelul** cu numărul pătratelor colorate și suprafața lor

Aplică formula pe care ți-o dă *fracTall*.(suma puterilor lui 8)



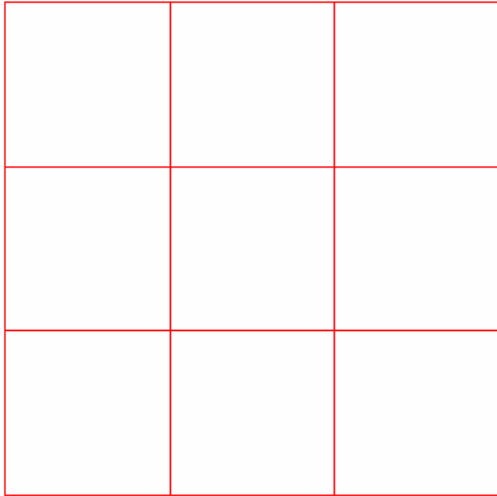
Colorează și tu pe pagina următoare pătratele rămase la iterațiile 1,2 și 3 !



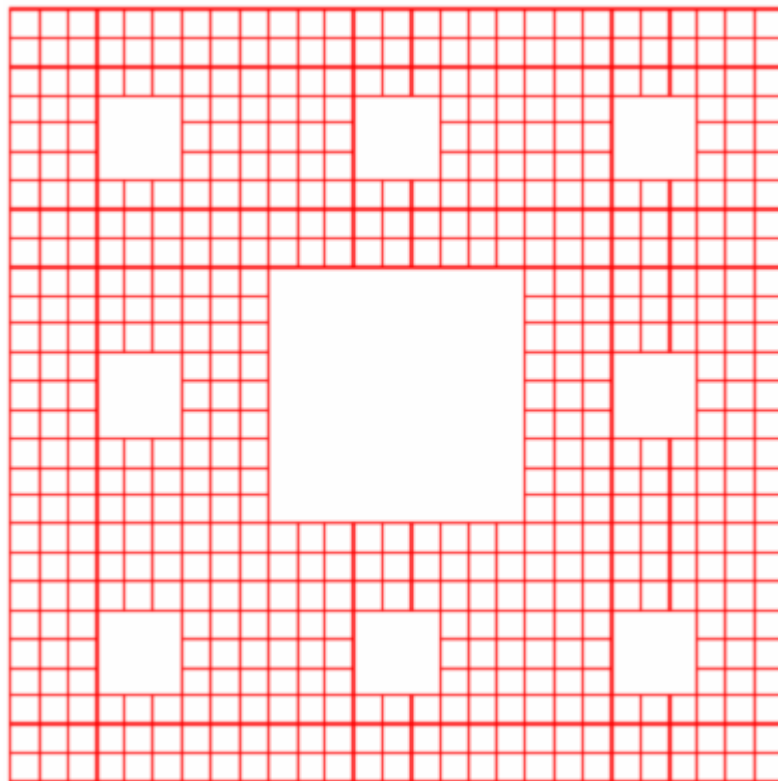
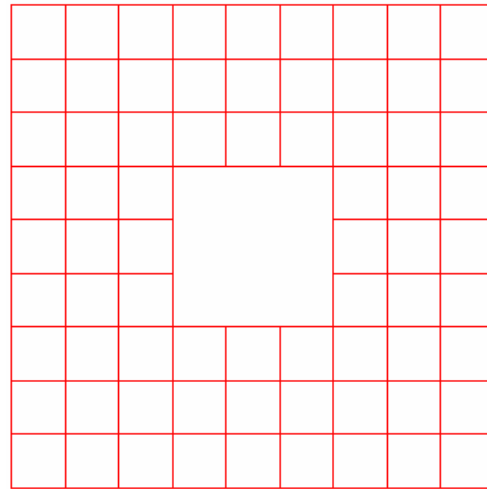
# fractall

te ajută să înțelegi matematica

iteratia desenata  
1.00



iteratia desenata  
2.00





# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Dacă latura pătratului inițial este  $l$  și aria sa este  $S$  completează tabelul următor:

Iterația	Număr de pătrate rămase	Număr total de pătrate de până acum	Lungimea laturii unui pătrat	Aria suprafeței rămase
0	1	1	$l$	$S$
1	8	9	$l/3$	$8/9 S$
2	$8^2$	73	$l/3^2$	$(8/9)^2 S$
3				
4				
5				
n	$8^n$	$(8^{n+1}-1):7$	$l/3^n$	$(8/9)^n S$

### Suma puterilor lui 8

$$1+8+8^2+8^3+8^4+\dots+8^n=(8^{n+1}-1):7$$



# fracTall

te ajută să înțelegi matematica

## 4.7. Numere impare

Să adunăm doar numere impare.

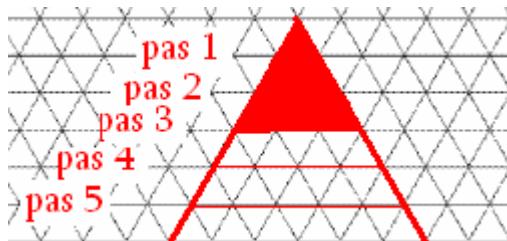
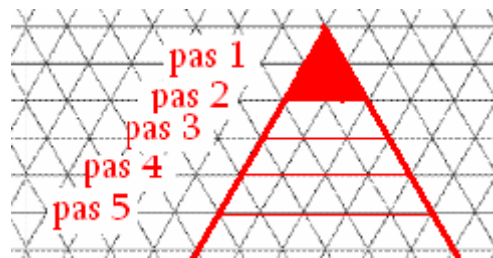
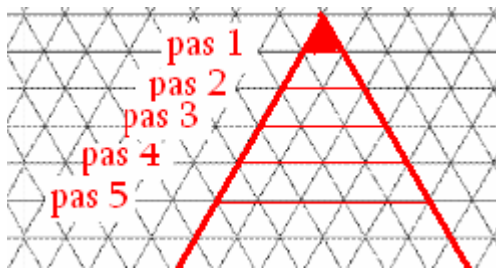
**Regulă :**

- Adaugăm câte o nouă linie de triunghiuri. Colorăm triunghiurile după modelul dat.

Colorează în continuare.

Completează tabelul cu numărul triunghiurilor colorate.

Aplică formula pe care ți-o dă *fracTall*. (suma primelor  $n$  numere prime)

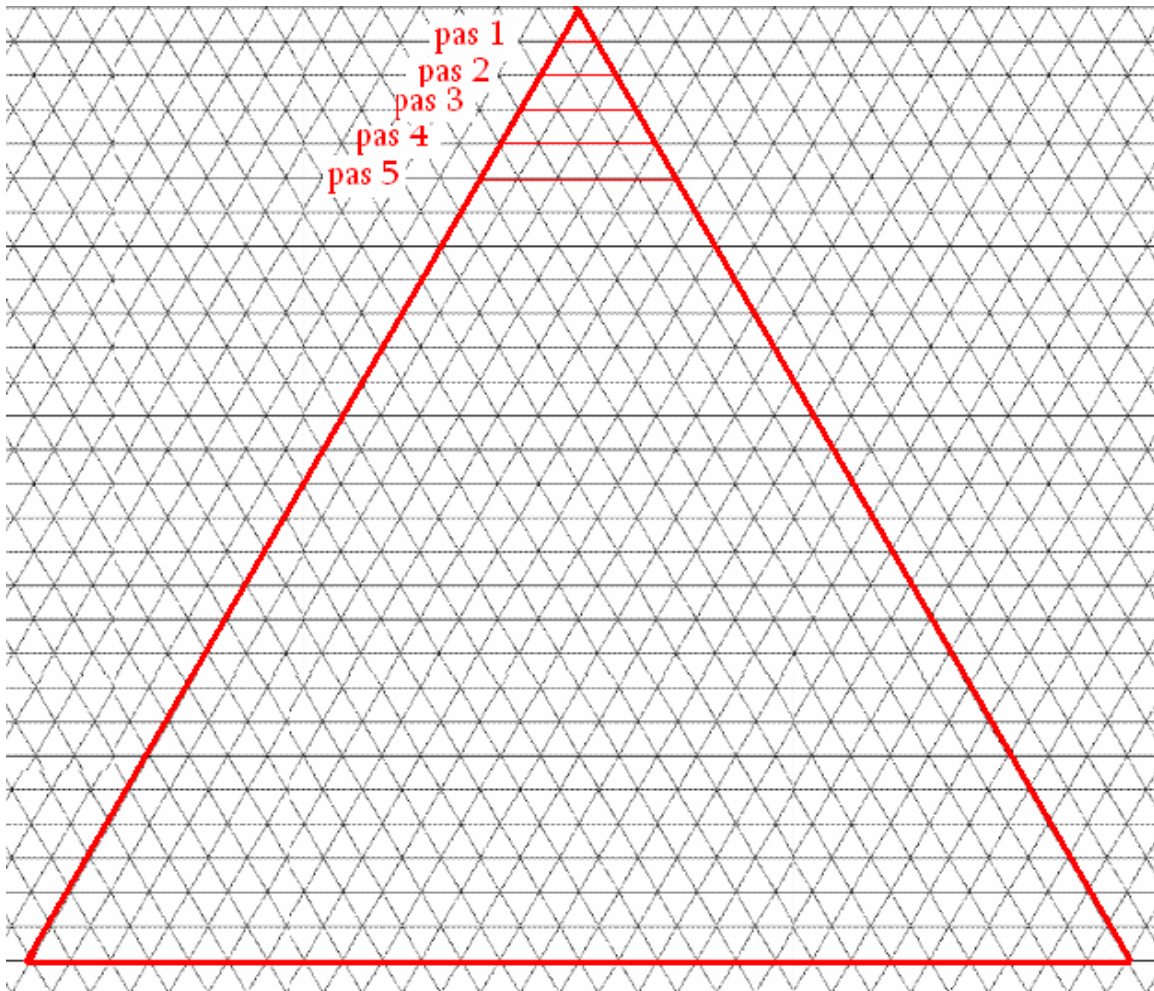






# fractAll

te ajută să înțelegi matematica





# fracTall

te ajută să înțelegi matematica

Completează tabelul următor. Folosește pentru aceasta formula pe care ți-o dă *fracTall*

pasul	1	2	3	4	5	10	40	n
Numar de triunghiuri colorate la acest pas	1	3	5	7	9			$2n-1$
Numar total de triunghiuri colorate	1	$4=2^2$	$9=3^2$	$16=$				

Suma primelor n numere naturale impare

$$S=1+3+5+ \dots + (2n-1)=n^2$$



# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

## 4.8. Numere prime. Regula lui 3.

Pascal ne învață să desenăm și altfel de triunghiuri cu numerele prime.

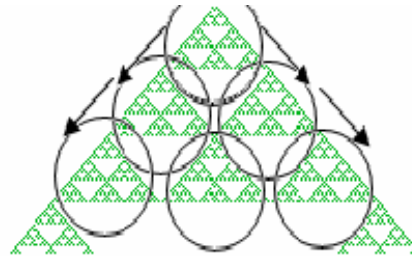
**Regula lui 3:**

- Completăm 3 linii de triunghiuri ca în exemplul următor

pas1



Acest "model" îl copiem de două ori pe următoarea linie și apoi de trei ori.



- Aplicăm regula anterioară desenului obținut la pasul precedent.

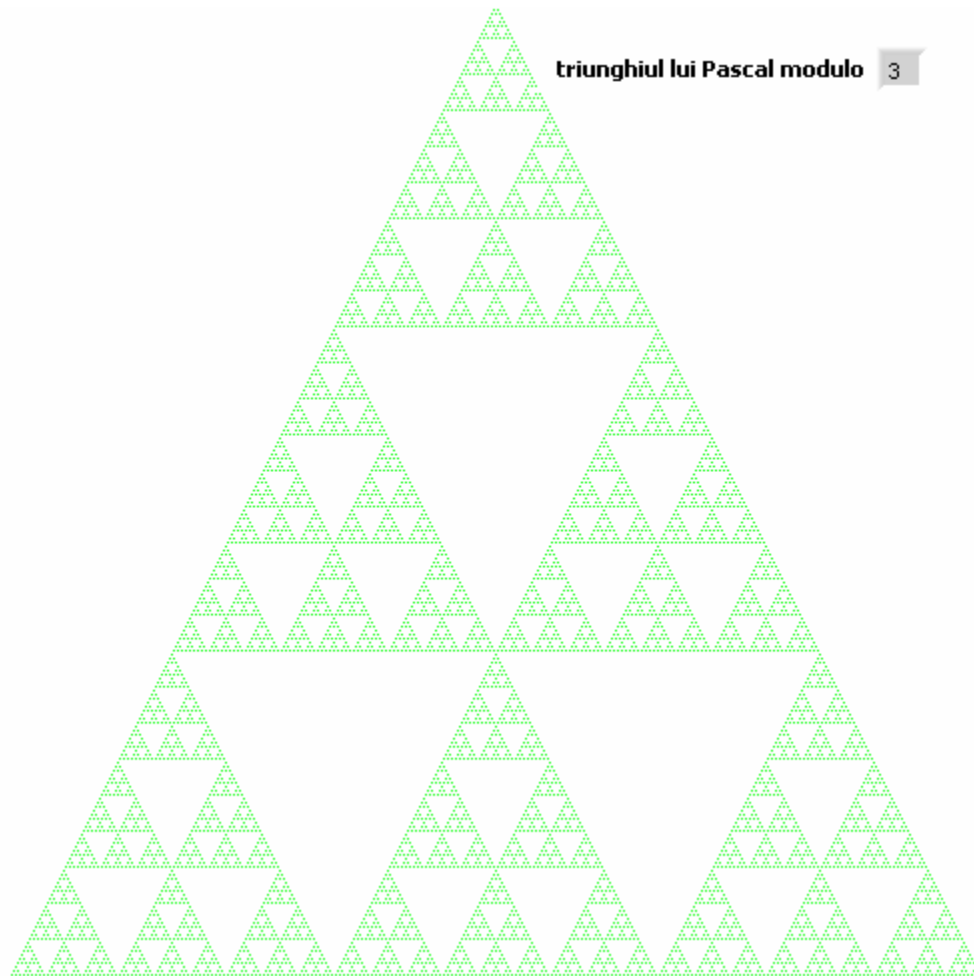
Completează tabelul cu numărul triunghiurilor colorate .



# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Dacă vei continua vei ajunge la imaginea următoare:

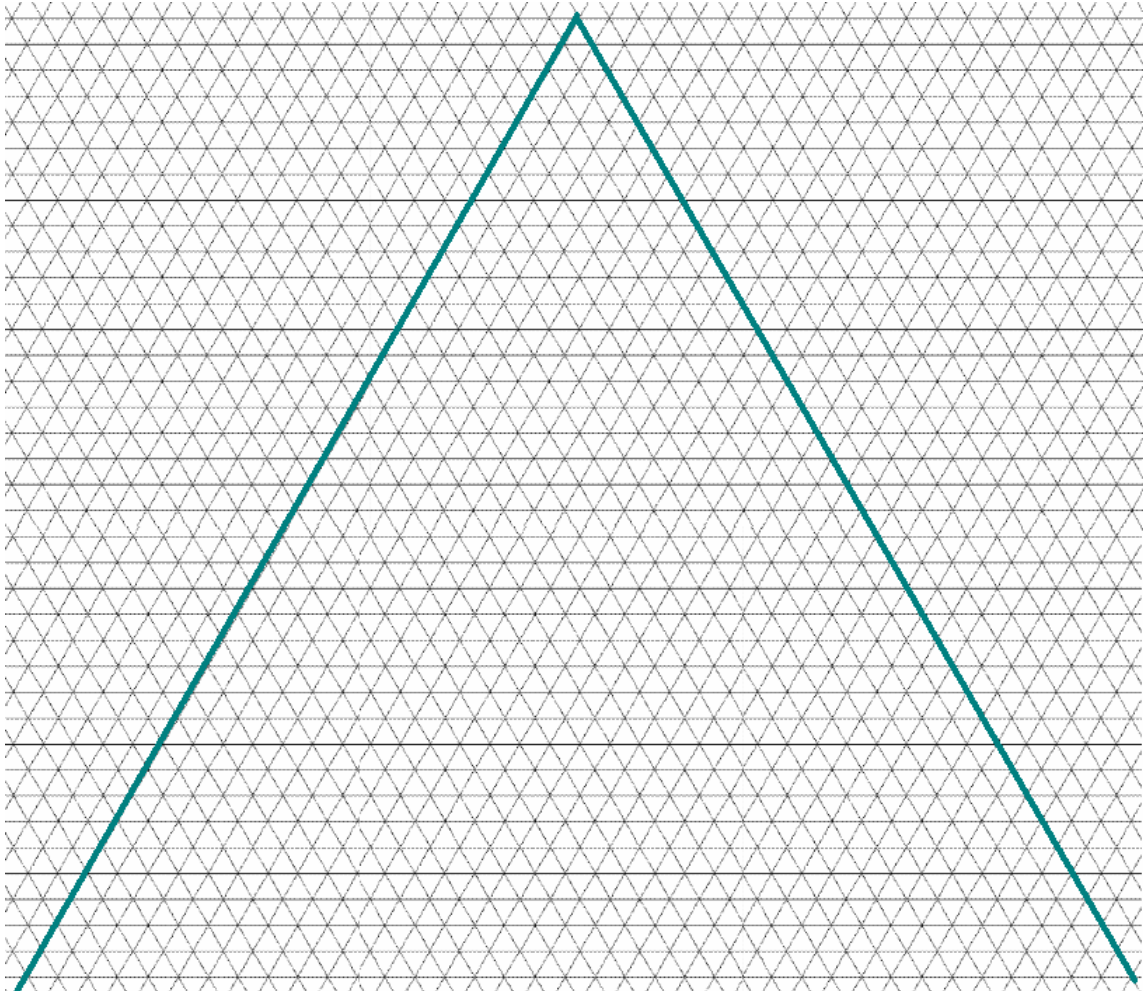


Desenează și tu după regula lui 3 triunghiul lui Pascal modulo 3.



# fractAll

te ajută să înțelegi matematica



Completează tabelul următor :

pasul	1	2	3	4	5	10	n
Numar total de triunghiuri colorate	6	$36=6^2$	$216=6^3$				



# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

## 4.9. Numere prime. Regula lui 5.

Descoperă și tu regula lui **5** din desenul de pe pagina următoare.

**Regula lui 5:**

- .....
- .....

Completează tabelul cu numărul triunghiurilor colorate .

pasul	1	2	3	4	5	10	n
Număr total de triunghiuri colorate	15						



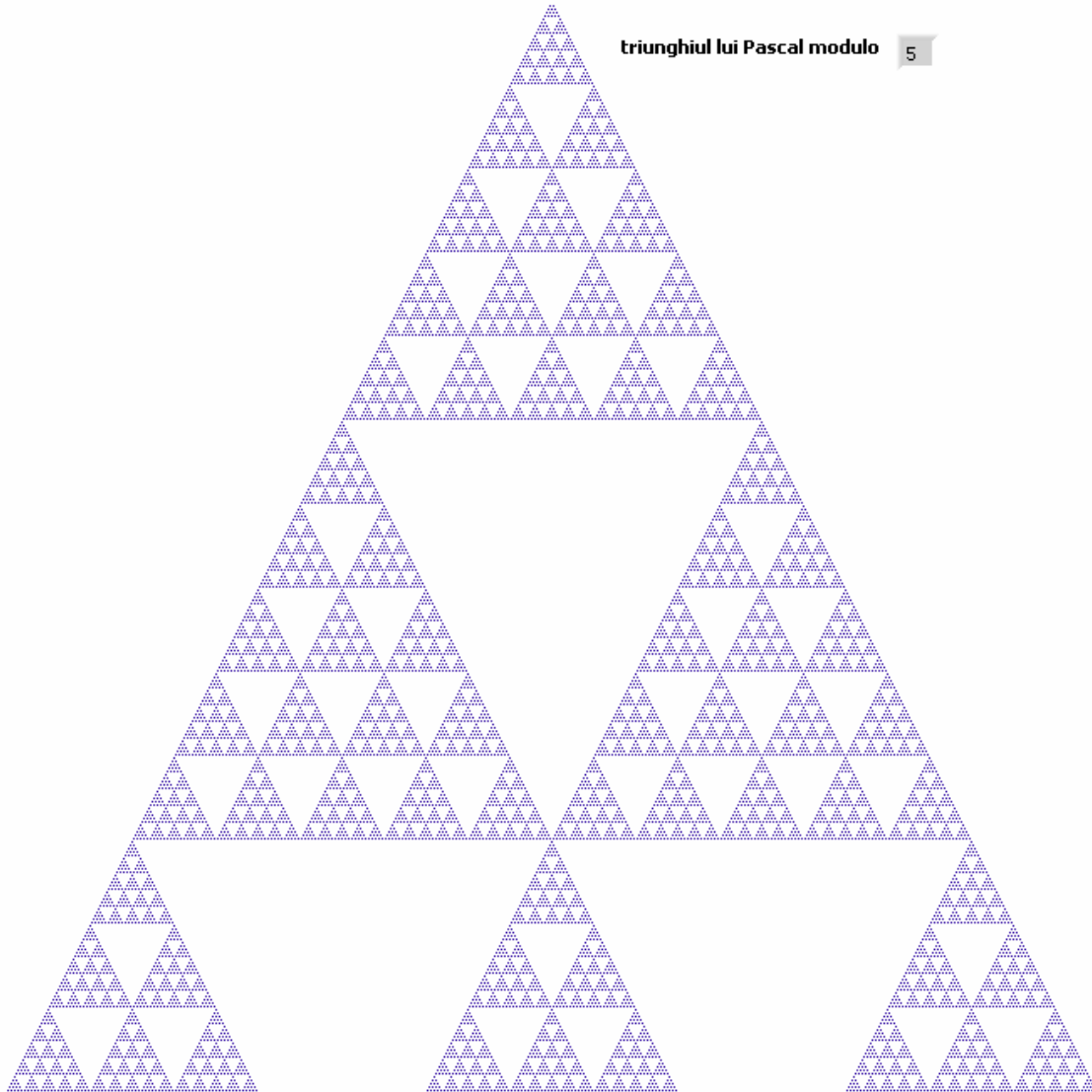
Portofoliul clasei a VI-a – Recreații matematice

# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

---

triunghiul lui Pascal modulo 5



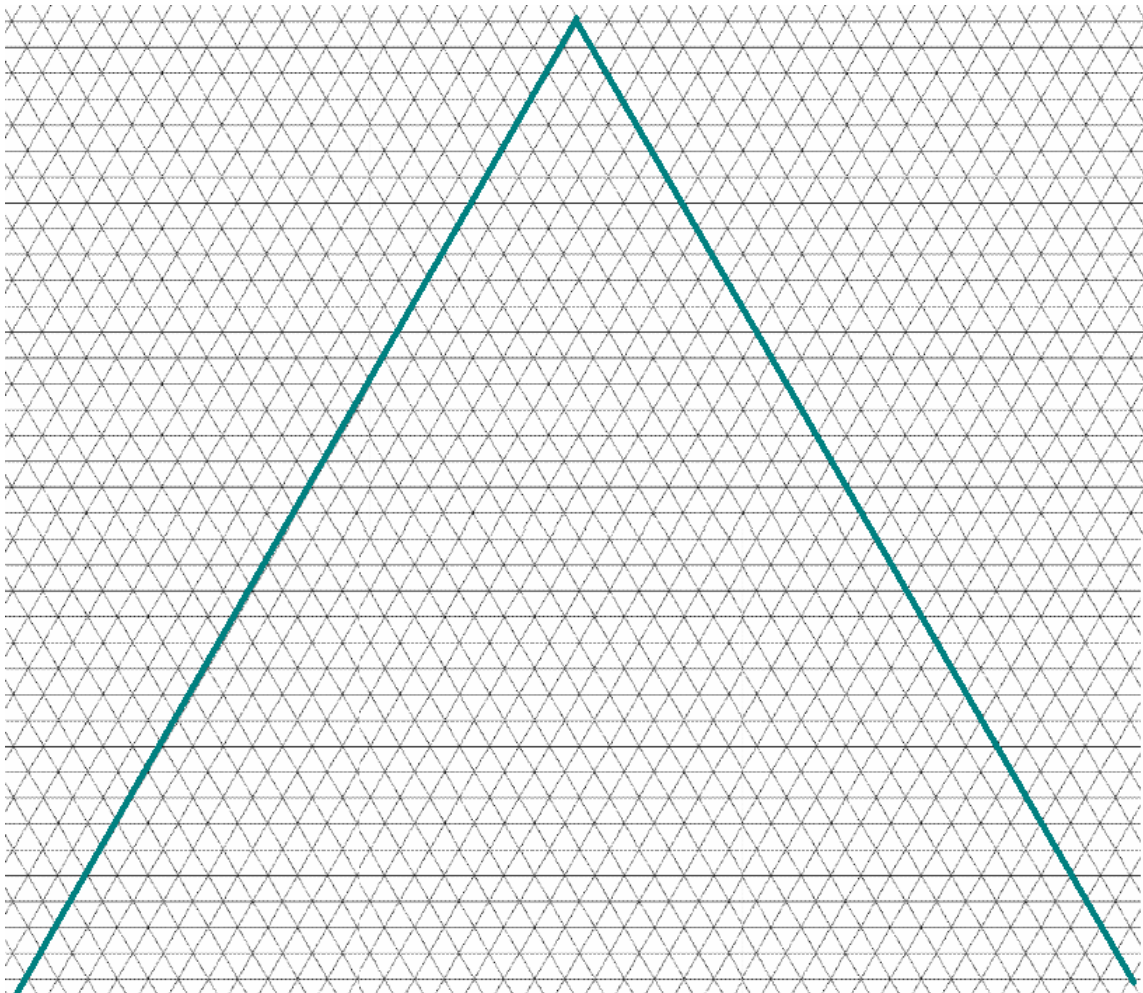


*Portofoliul clasei a VI-a – Recreații matematice*

# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Colorează și tu după regula lui 5 triunghiul lui Pascal modulo 5.





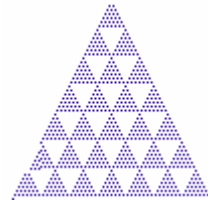


# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

## 4.10. Numere prime. Regula lui \_\_\_\_\_

Descoperă si tu regula lui ..... din desenul următor.



Regula lui .....

- .....
- .....

Completează tabelul cu numărul triunghiurilor colorate . Ajută-te de desenul de pe pagina următoare

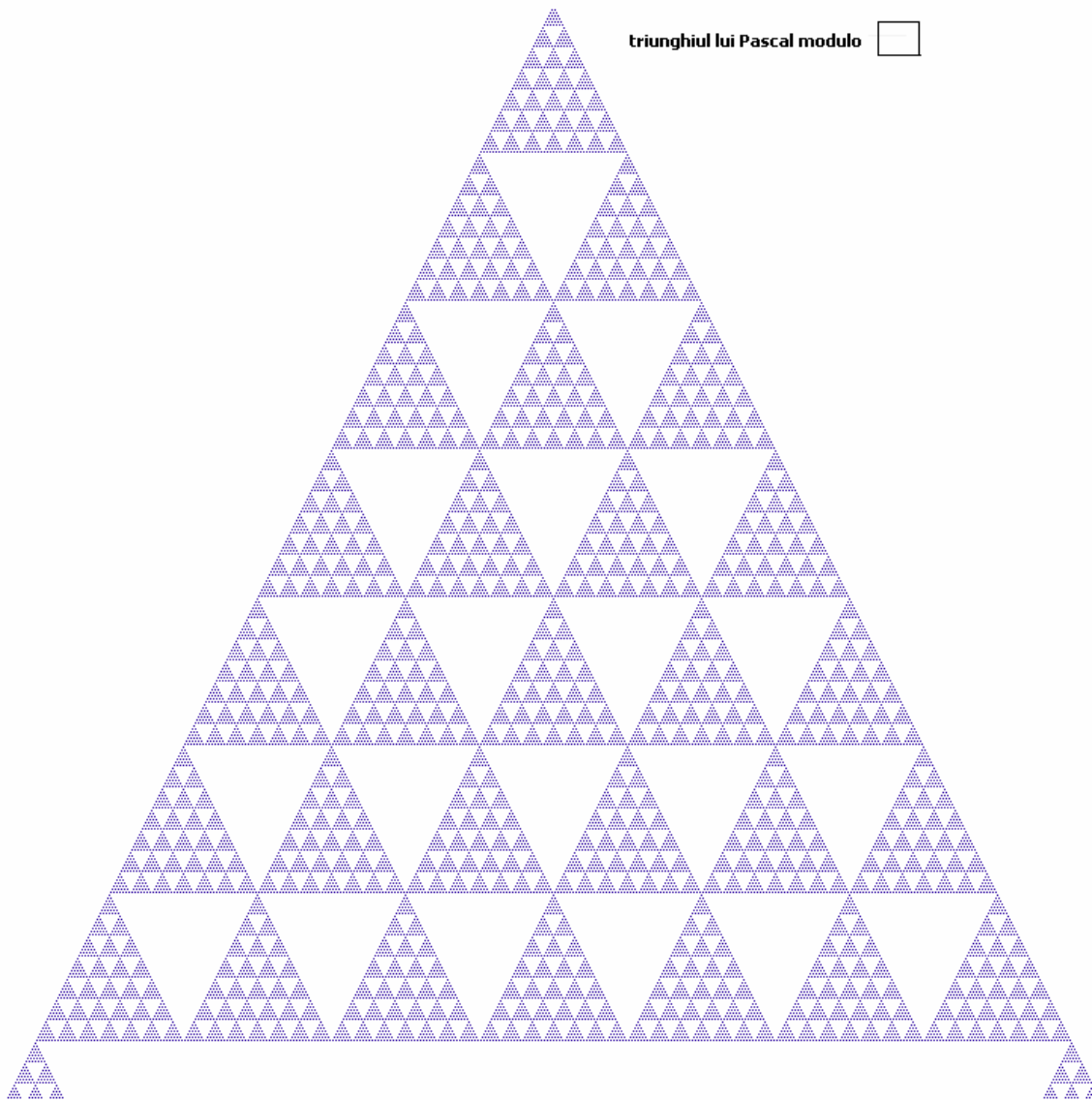
pasul	1	2	3	4	5	10	n
Numar total de triunghiuri colorate							



# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Completează si tu după regula lui ..... triunghiul lui Pascal modulo .....

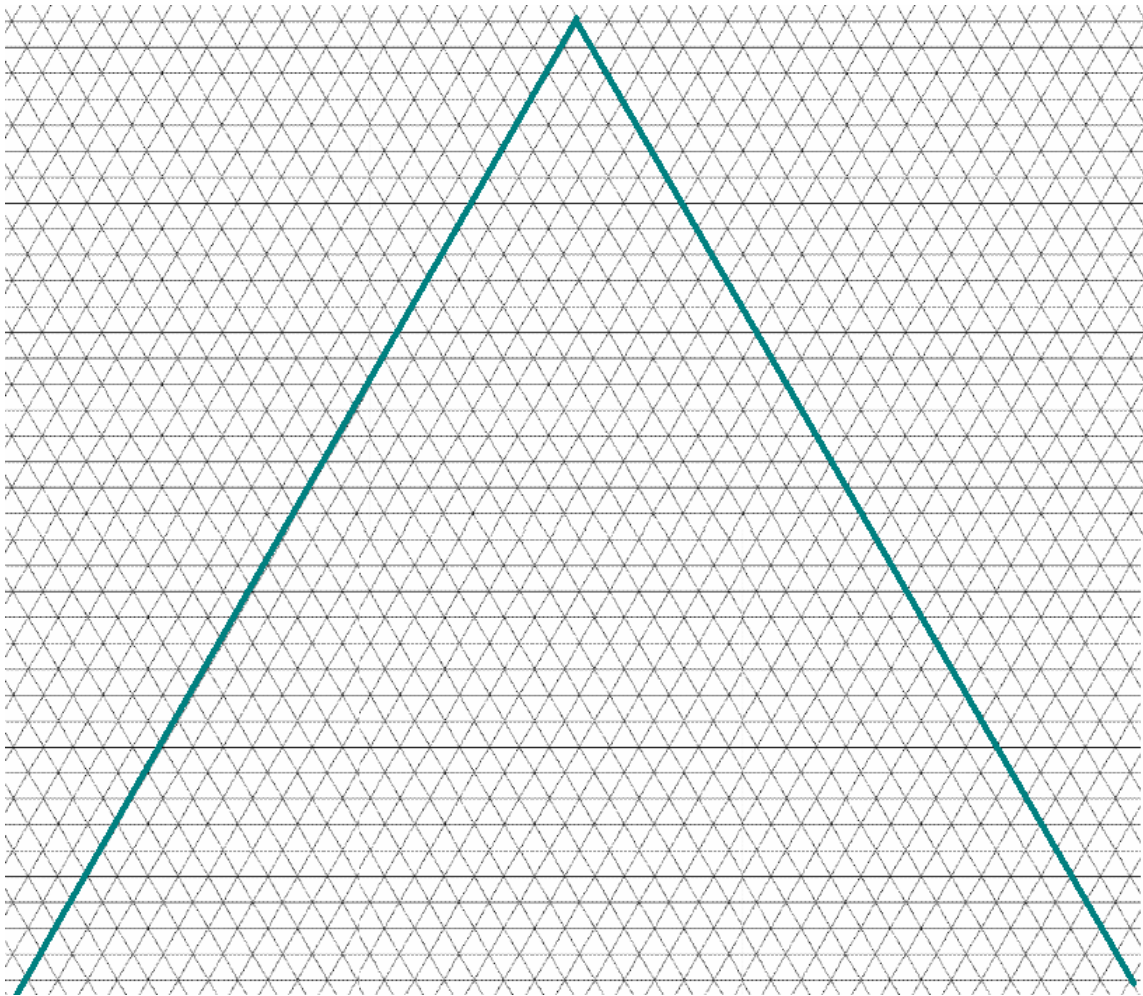




*Portofoliul clasei a VI-a – Recreații matematice*

# *fractAll*

te ajută să înțelegi matematica





# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

## 4.11. Numere prime. Regula lui \*\*\*\*

Descoperă și tu numărul .....și regula lui din desenul următor



Regula lui .....

- .....
- .....

Completează tabelul cu numărul triunghiurilor colorate . Ajută-te de desenul de pe pagina următoare.

pasul	1	2	3	4	5	10	n
Număr total de triunghiuri colorate							



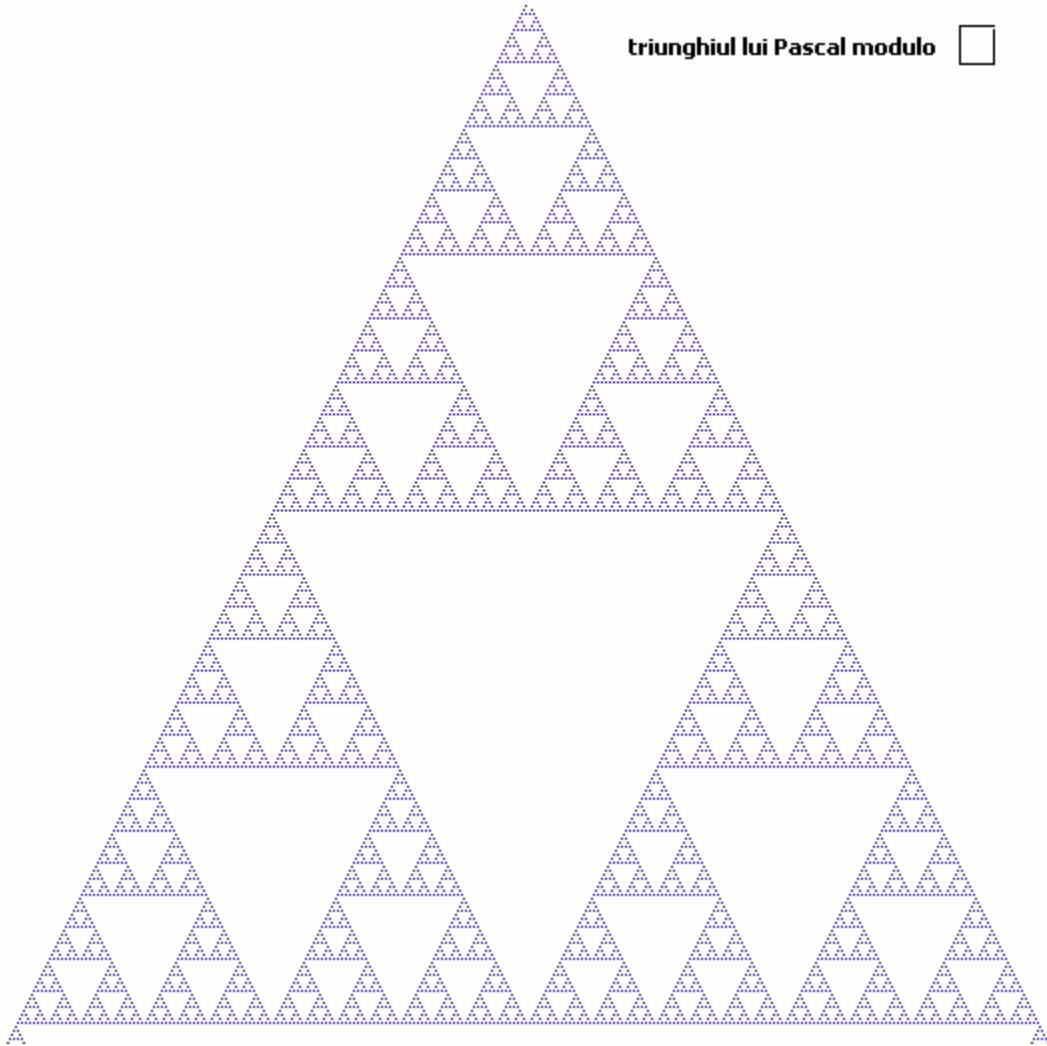
Portofoliul clasei a VI-a – Recreații matematice

# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

---

triunghiul lui Pascal modulo



Ai mai întâlnit imaginea aceasta până acum ?



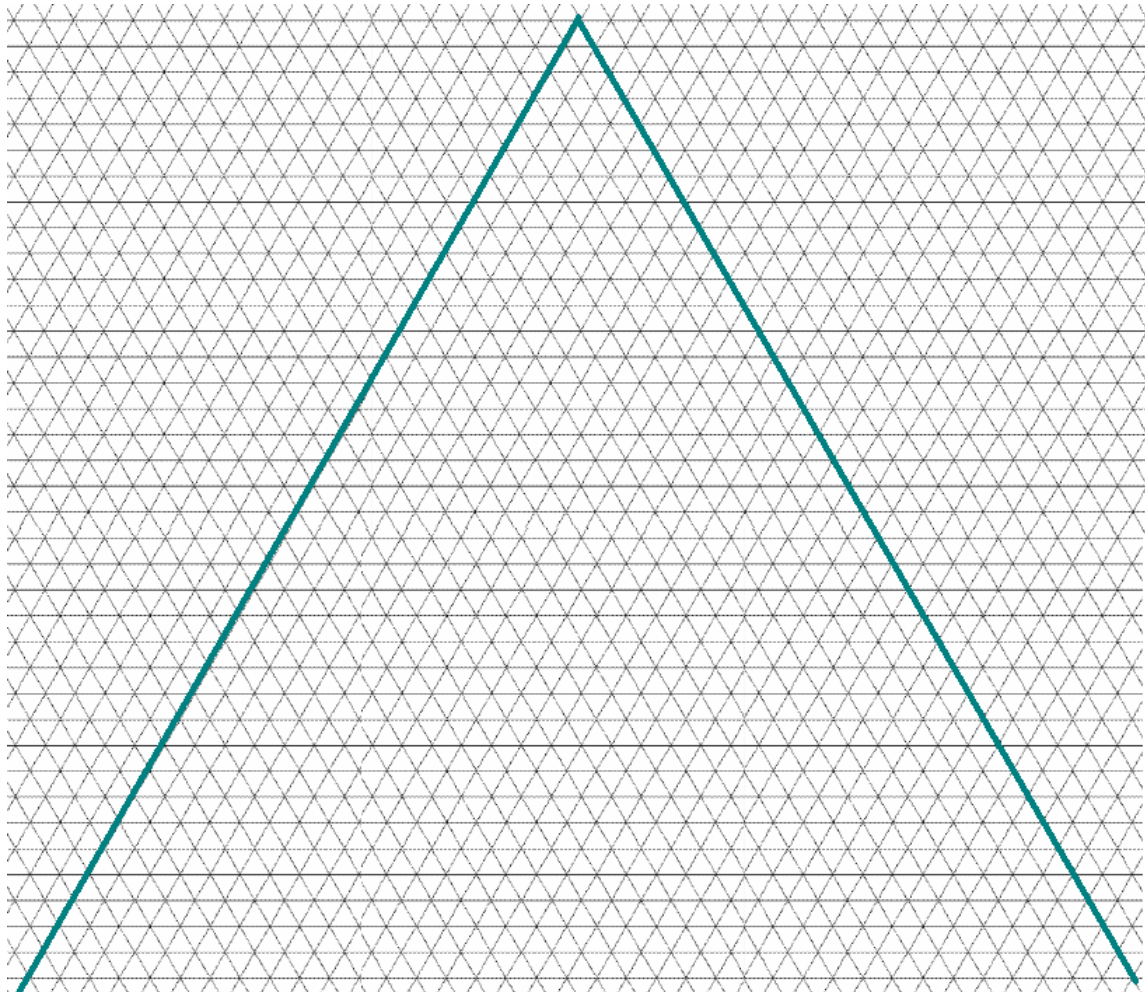
# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Dacă da, cum se numea triunghiul ?

Răspuns .....

Completează și tu după regula lui ..... triunghiul lui Pascal  
modulo .....





# fracTall

te ajută să înțelegi matematica

## 4.12. Din nou la infinit cu Koch

Cu pași mici ajungem cât de departe dorim dacă avem timp și răbdare. Vom începe construcția unei curbe care poate atinge cu lungimea ei infinitul pornind de la un pătrat.

**Regula (Curba lui Koch cu model pătrat) :**

- Impărțim fiecare latură a poligonului în 3 părți egale; "eliminăm" segmentul din mijloc și îl înlocuim în exterior cu un pătrat din care lipsește o latură.

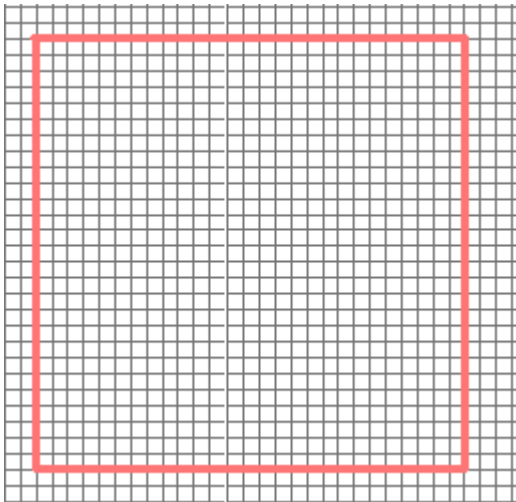
Desenează în continuare.

Completează tabelul

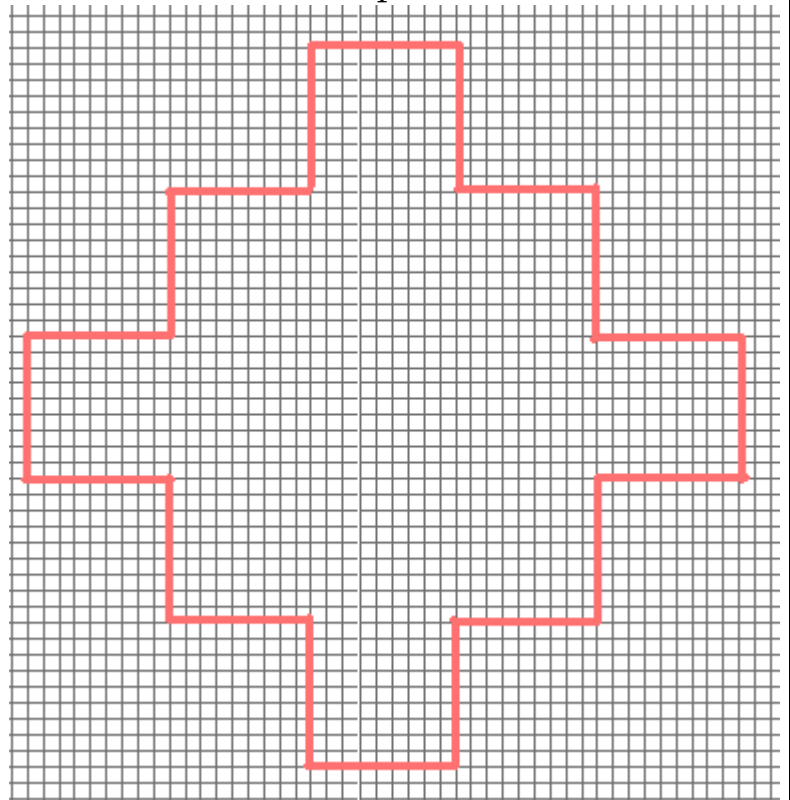
cu lungimea curbei

Aplică formula

pe care ti-o dă *fracTall*



*pas 0*



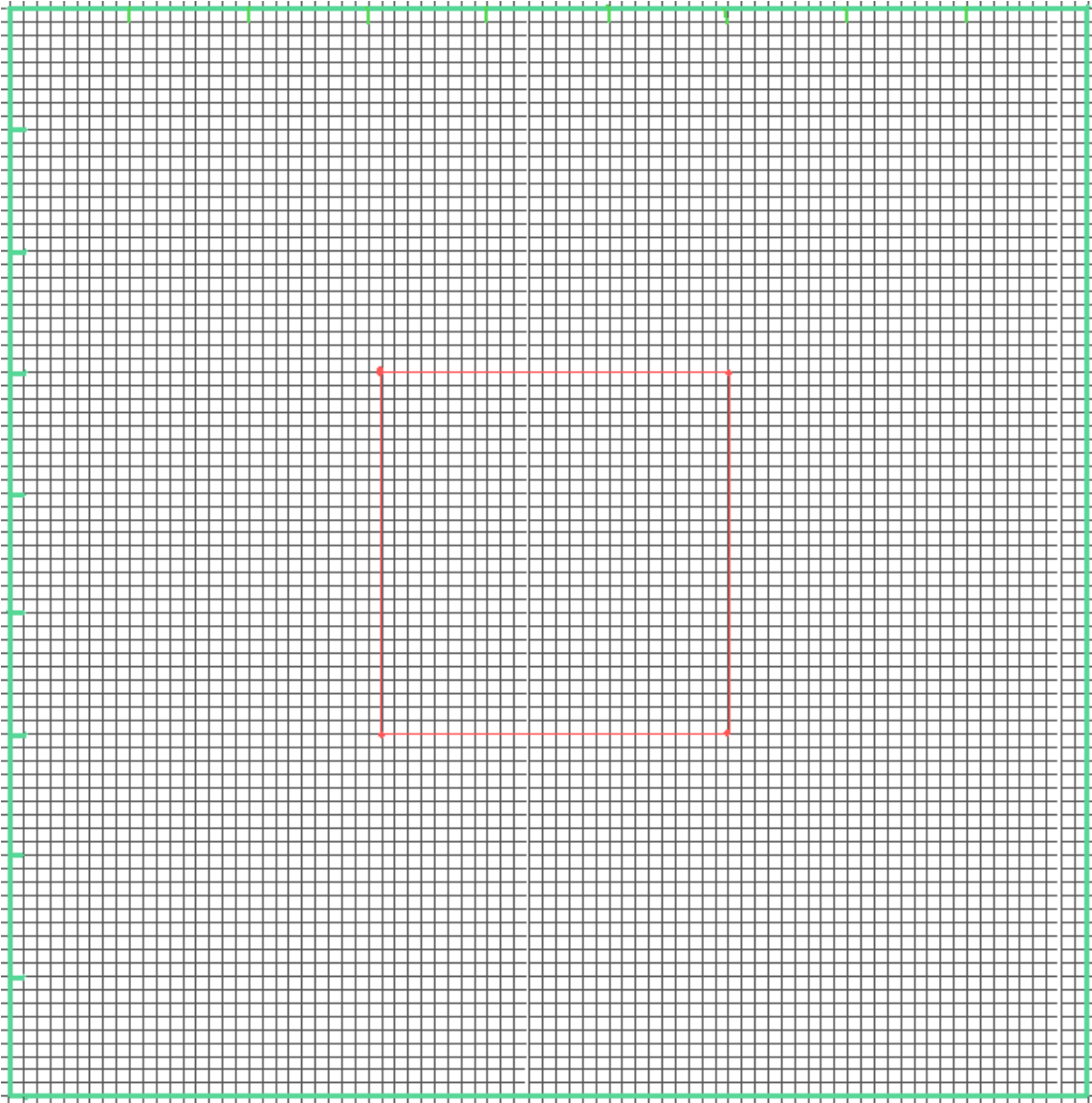
*pas 1*



# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Desenează și tu aici pasul 1 !





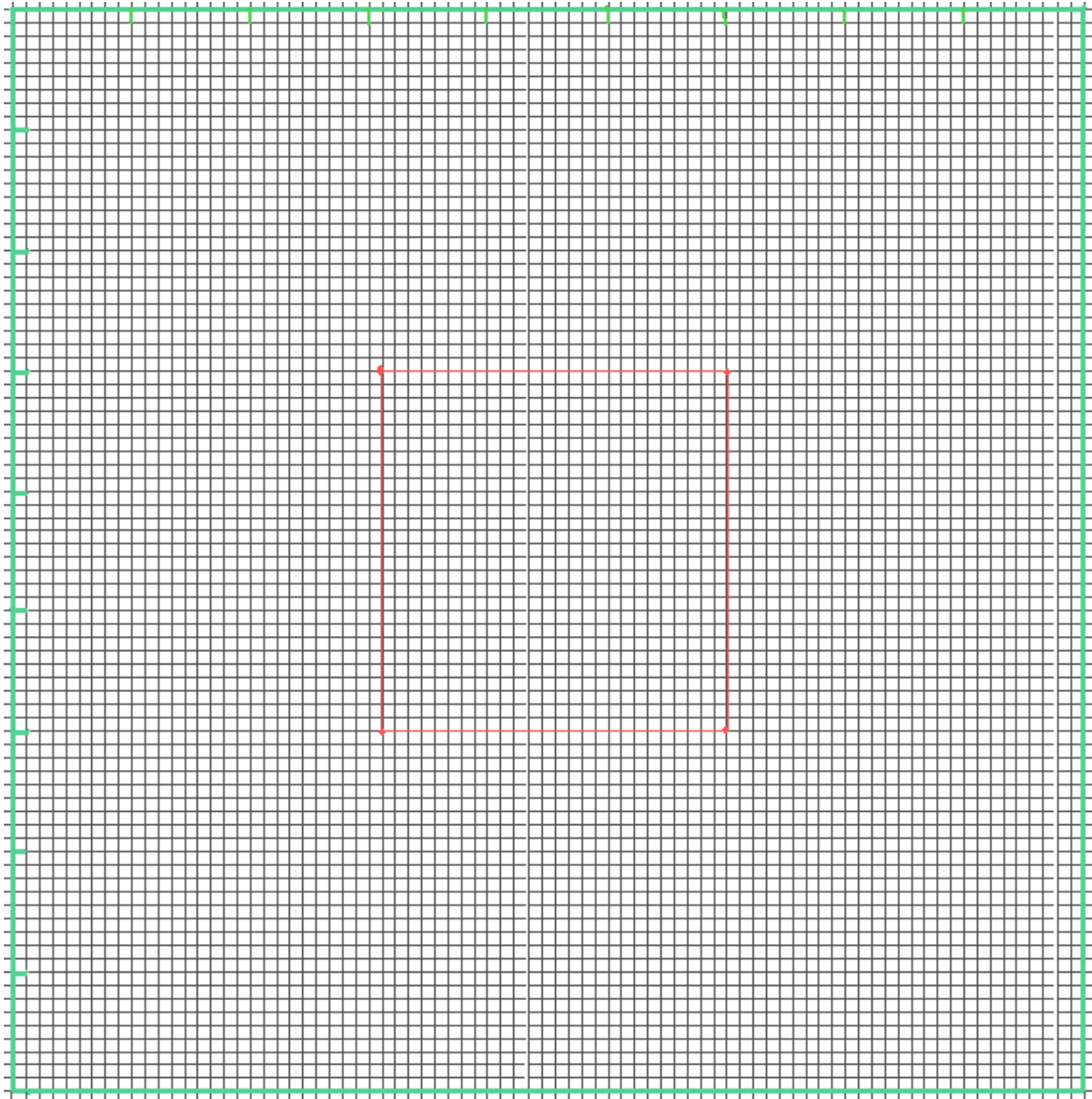


*Portofoliul clasei a VI-a – Recreații matematice*

# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Completează apoi cu desenul de la pasul 2 în pagina următoare!





# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Iterația	Număr de pătrate adăugate suprafeței	Lungimea laturii unui pătrat	Numărul segmentelor curbei	Lungimea curbei	Aria suprafeței
0	0	1	4	4l	$P = S$
1	4	$1/3$	$5 \cdot 4 = 20$	$20 \cdot 1/3$	$P + 4 \cdot P/9$
2	$5 \cdot 4 = 20$	$1/3^2$	$5^2 \cdot 4$	$5^2 \cdot 4 \cdot 1/3^2$	$P + 4 \cdot P/9 + 5 \cdot 4 \cdot P/9^2$
3	$5^2 \cdot 4 = 100$	$1/3^3$	$5^3 \cdot 4$	$5^3 \cdot 4 \cdot 1/3^3$	$P + 4 \cdot P/9 + 5 \cdot 4 \cdot P/9^2 + 5^2 \cdot 4 \cdot P/9^3$
4	$5^3 \cdot 4$	$1/3^4$			
5					
n	$5^{n-1} \cdot 4$	$1/3^n$	$5^n \cdot 4$	$5^n \cdot 4 \cdot 1/3^n$ $= (5/3)^n \cdot 4 \cdot l$	



# fracTall

te ajută să înțelegi matematica

Vom demonstra în pagina următoare că aria suprafeței este finită  
În calculul acestei arii folosim formula sumei de puteri pe care ne-o dă  
**fracTall**.

Poti să nu urmărești calculele următoare dacă sunt prea dificile .  
Retine însă că suprafața desenată de tine este finită dar curba se mărește  
oricât de mult vrem ( la fiecare pas lungimea ei se înmulțește cu factorul  
supraunitar 5/3.

$$\begin{aligned} S_n &= I^2 + 4 I^2 / 9 + 5 \cdot 4 I^2 / 9^2 + 5^2 \cdot 4 I^2 / 9^3 + 5^3 \cdot 4 I^2 / 9^4 + \dots + 5^{n-1} \cdot 4 I^2 / 9^n = \\ &= I^2 + 4 I^2 ( 1/9 + 5/9^2 + 5^2 / 9^3 + 5^3 / 9^4 + \dots + 5^{n-1} / 9^n ) = \\ &= I^2 + ( 4 I^2 / 5 ) ( 5/9 + 5^2 / 9^2 + 5^3 / 9^3 + 5^4 / 9^4 + \dots + 5^n / 9^n ) = \\ &= I^2 + ( 4 I^2 / 5 ) [(1+5/9 + 5^2 / 9^2 + 5^3 / 9^3 + 5^4 / 9^4 + \dots + 5^n / 9^n ) - 1] = \\ &= I^2 + ( 4 I^2 / 5 ) [ (1 - (5/9)^n) / (1 - 5/9) - 1 ] = \\ &= I^2 + ( 4 I^2 / 5 ) [ (9/4) (1 - (5/9)^n) - 1 ] < \\ &< I^2 + ( 4 I^2 / 5 ) (9/4 - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Deci } S_n < I^2 + ( 4 I^2 / 5 ) (5/4)$$

$$S_n < I^2 + I^2$$

$$S_n < 2 I^2$$

**Sume de puteri pentru  $r = 5/9$**

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^{n-1} = (1 - r^n) / (1 - r)$$



# fracTall

te ajută să înțelegi matematica

## 4.13. Și din nou la infinit cu Koch (varanta 2)

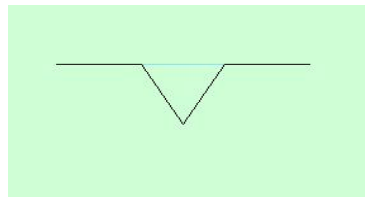
Regulă: (Curba lui Koch cu model triunghi echilateral):

- Împărțim fiecare latură a poligonului în 3 părți egale ; "eliminăm" segmentul din mijloc și îl înlocuim în exterior cu un triunghi echilateral din care lipsește o acea latură.

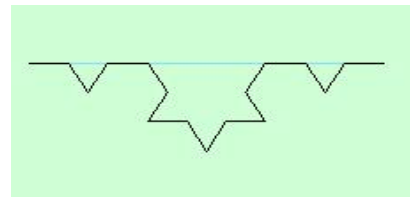
Desenează în continuare.

Completează tabelul cu lungimea curbei.

Aplică formula pe care ți-o dă *fracTall*

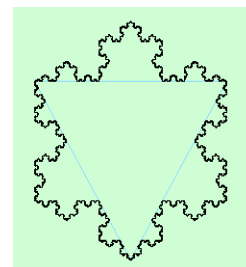
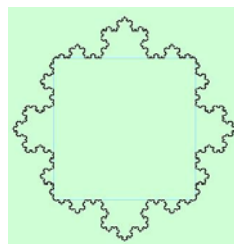
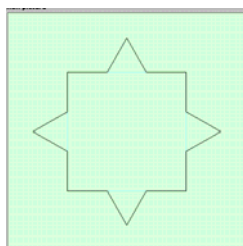


*pas 1*



*pas 2*

De exemplu, să vedem ce se obține aplicând de mai multe ori regula lui Koch dintr-un pătrat sau dintr-un triunghi.



*Fulgul lui Koch*

*Insula lui Koch*

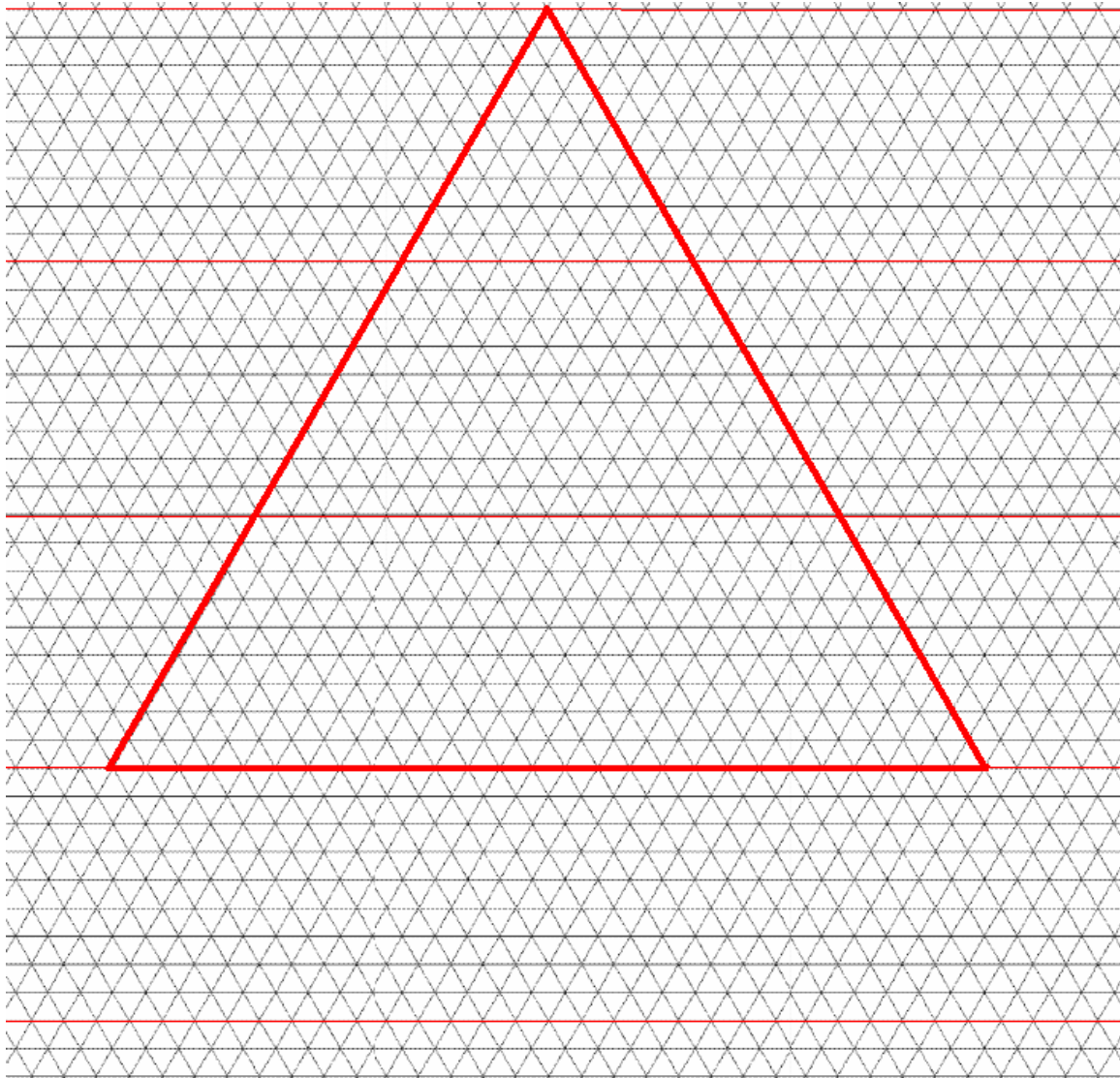


# fractall

te ajută să înțelegi matematica

Desenează cu verde curba ce se obține la pasul 1.

Desenează cu albastru pe pagina următoare  
curba ce se obține la pasul 2.

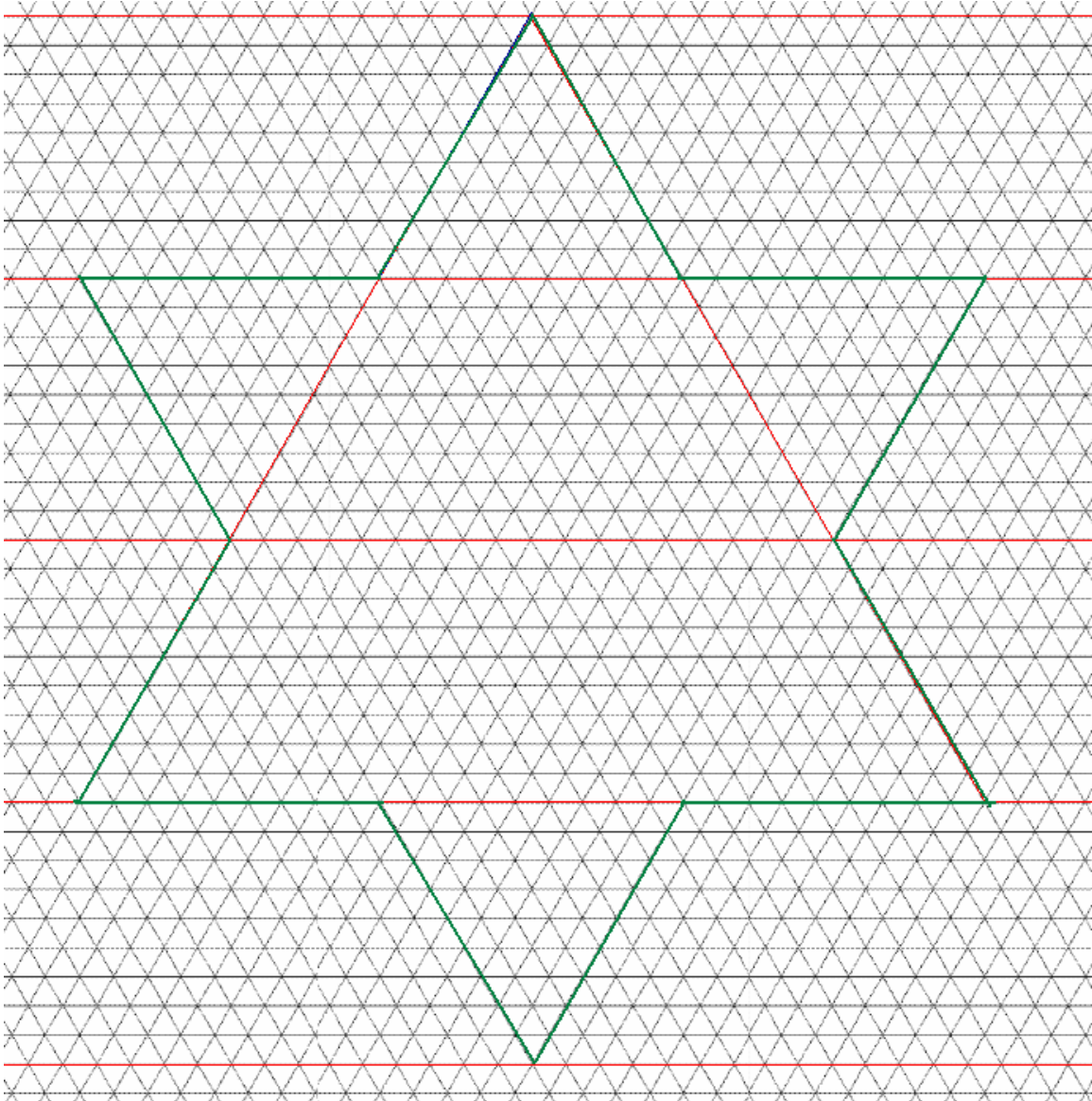




Portofoliul clasei a VI-a – Recreații matematice

# fractAll

te ajută să înțelegi matematica





# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Iterația	Număr de triunghiuri adăugate suprafeței	Lungimea laturii poligonului	Numărul segmentelor curbei	Lungimea curbei	Aria suprafeței
0	0	$l$	3	$3l$	$S$
1	3	$l/3$	$4 \cdot 3=12$	$12 l/3$	$S+3S/9$
2	$4 \cdot 3=12$	$l/3^2$	$4^2 \cdot 3$	$4^2 3 l/3^2$	$S+3S/9+3 4S/9^2$
3	$4^2 \cdot 3=48$	$l/3^3$	$4^3 \cdot 3$	$4^3 3 l/3^3$	$S+3S/9+$ $3 4S/9^2 +3 4^2 S/9^3$
4	$4^3 \cdot 3$	$l/3^4$			
5					
n	$4^{n-1} \cdot 3$	$l/3^n$	$4^n \cdot 3$	$4^n 3 l/3^n =$ $(4/3)^n 3 l$	

**Sume de puteri pentru  $r=4/9$**

$$1+r+r^2+r^3+r^4+\dots+r^{n-1}=(1-r^n)/(1-r)$$



# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Ca și mai înainte suprafața desenată de tine este finită dar curba se mărește oricât de mult vrem , la fiecare pas lungimea ei se înmulțește cu factorul supraunitar  $4/3$ .

Poti să nu urmărești calculele următoare dacă sunt prea dificile .

$$S_n = S + 3S/9 + 4 \cdot 3S/9^2 + 4^2 \cdot 3S/9^3 + 4^3 \cdot 3S/9^4 + \dots + 4^{n-1} \cdot 3S/9^n =$$

$$= S + 3S(1/9 + 4/9^2 + 4^2/9^3 + 4^3/9^4 + \dots + 4^{n-1}/9^n) =$$

$$= S + (3S/4)(4/9 + 4^2/9^2 + 4^3/9^3 + 4^4/9^4 + \dots + 4^n/9^n) =$$

$$= S + (3S/4)[(1 + 4/9 + 4^2/9^2 + 4^3/9^3 + 4^4/9^4 + \dots + 4^n/9^n) - 1] =$$

$$= S + (3S/4)[(1 - (4/9)^n)/(1 - 4/9) - 1] =$$

$$= S + (3S/4)[(9/5)(1 - (4/9)^n) - 1] < S + (3S/4)[(9/5) - 1]$$

$$\text{Deci } S_n < S + (3S/4)(4/5)$$

$$S_n < S + 3S/5$$





# fracTall

te ajută să înțelegi matematica

## 4.14. *fracTall* îți demonstrează formulele

- 1) Suma primelor  $n$  numere naturale

$$S=1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$$

- 2) Suma puterilor lui 2

$$S=1+2+2^2 +2^3 +2^4 +\dots+2^n=2^{n+1} -1$$

- 3) Suma puterilor lui 3

$$S=1+3+3^2 +3^3 +3^4 +\dots+3^n=(3^{n+1} -1):2$$

- 4) Suma puterilor lui 4

$$S=1+4+4^2 +4^3 +4^4 +\dots+4^n=(4^{n+1} -1):3$$

- 5) Suma puterilor lui 5

$$S=1+5+5^2 +5^3 +5^4 +\dots+5^n=(5^{n+1} -1):4$$

- 6) Suma puterilor lui 8

$$S=1+8+8^2 +8^3 +8^4 +\dots+8^n=(8^{n+1} -1):7$$

- 7) Sume de puteri

$$S=1+r+r^2 +r^3 +r^4 +\dots+r^{n-1}=(1-r^n)/(1-r)$$

- 8) Suma primelor  $n$  numere naturale impare

$$S=1+3+5+ \dots+ (2n-1)=n^2$$



# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

## 1) Suma primelor n numere naturale

$$S=1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$$

### Demonstrația 1

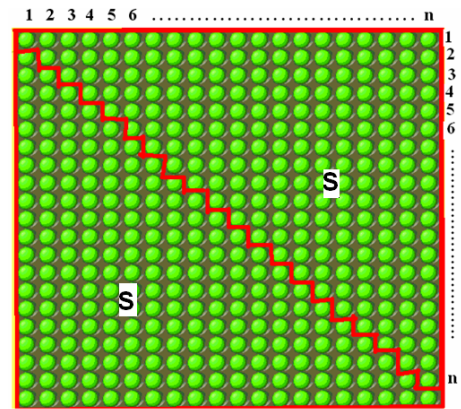
$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 \end{array}$$

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)$$

$$2S = n(n+1) \rightarrow S = n(n+1)/2$$

### Demonstrația 2

Se bazeaza pe imaginea urmatoare:



$$S=1+2+3+\dots+n$$

$$2S = n(n+1) \rightarrow 1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$$

## 2) Suma puterilor lui 2

$$S=1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^n=2^{n+1}-1$$

### Demonstrație

$$S=1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^n.$$

Înmulțim in aceasta relație cu 2

Scădem apoi S.

$$\begin{array}{r} 2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n + 2^{n+1} \\ -S = -1 - 2 - 2^2 - 2^3 - \dots - 2^{n-1} - 2^n \end{array}$$

$$S = 2^{n+1} - 1$$

# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

### 3) Suma puterilor lui 3

$$S=1+3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^n=(3^{n+1}-1):2$$

Demonstratie

$$S=1+3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^n.$$

Înmulțim în această relație cu 3

Scădem apoi S.

$$\begin{array}{r} 3S = \cancel{3} + \cancel{3^2} + \cancel{3^3} + \cancel{3^4} + \dots + \cancel{3^n} + 3^{n+1} \\ -S = -1 - \cancel{3} - \cancel{3^2} - \cancel{3^3} - \dots - \cancel{3^{n-1}} - \cancel{3^n} \\ \hline 2S = 3^{n+1} - 1 \end{array}$$

### 4) Suma puterilor lui 4

$$S=1+4+4^2+4^3+4^4+\dots+4^n=(4^{n+1}-1):3$$

Demonstratie

$$S=1+4+4^2+4^3+4^4+\dots+4^n.$$

Înmulțim în aceasta relație cu 4.

Scădem apoi S.

$$\begin{array}{r} 4S = \cancel{4} + \cancel{4^2} + \cancel{4^3} + \cancel{4^4} + \dots + \cancel{4^n} + 4^{n+1} \\ -S = -1 - \cancel{4} - \cancel{4^2} - \cancel{4^3} - \dots - \cancel{4^{n-1}} - \cancel{4^n} \\ \hline 3S = 4^{n+1} - 1 \end{array}$$

### 5) Suma puterilor lui 5

$$S=1+5+5^2+5^3+5^4+\dots+5^n=(5^{n+1}-1):4$$

Demonstratie

$$S=1+5+5^2+5^3+5^4+\dots+5^n.$$

Înmulțim în această relație cu 5.

Scădem apoi S.



# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

$$\begin{array}{r} 5S = \cancel{5} + \cancel{5^2} + \cancel{5^3} + \cancel{5^4} + \dots + \cancel{5^n} + 5^{n+1} \\ -S = -1 - \cancel{5} - \cancel{5^2} - \cancel{5^3} - \dots - \cancel{5^{n-1}} - \cancel{5^n} \end{array}$$

---

$$4S = 5^{n+1} - 1$$

## 6) Suma puterilor lui 8

$$S = 1 + 8 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + \dots + 8^n = (8^{n+1} - 1) : 7$$

Demonstrație

$$S = 1 + 8 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + \dots + 8^n$$

Înmulțim în această relație cu 8.

Scădem apoi S.

$$\begin{array}{r} 8S = \cancel{8} + \cancel{8^2} + \cancel{8^3} + \cancel{8^4} + \dots + \cancel{8^n} + 8^{n+1} \\ -S = -1 - \cancel{8} - \cancel{8^2} - \cancel{8^3} - \dots - \cancel{8^{n-1}} - \cancel{8^n} \end{array}$$

---

$$7S = 8^{n+1} - 1$$

## 7) Sume de puteri

$$S = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^{n-1} = (1 - r^n) / (1 - r)$$

Demonstrația 1

$$S = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^{n-1}$$

Înmulțim în această relație cu r.

Scădem apoi S.

$$\begin{array}{r} rS = \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \cancel{r^4} + \dots + \cancel{r^{n-1}} + r^n \\ -S = -1 - \cancel{r} - \cancel{r^2} - \cancel{r^3} - \dots - \cancel{r^{n-2}} - \cancel{r^{n-1}} \end{array}$$

---

$$(r - 1)S = r^n - 1$$

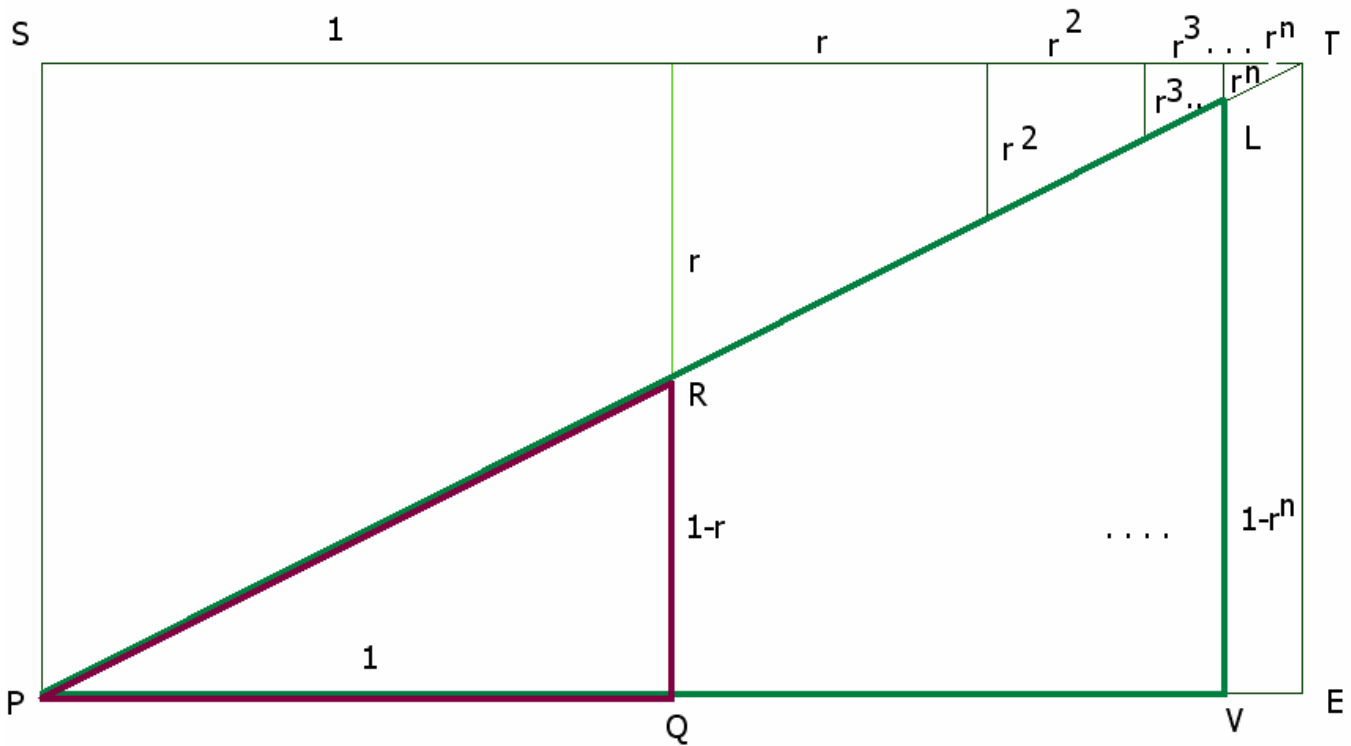
Sau dacă înmulțim cu  $-1$ :  $(1 - r)S = 1 - r^n$



# fractAll

te ajută să înțelegi matematica

Demonstrația 2 ( Utilizează asemănarea triunghiurilor ce se va învăța în clasa a VII-a)

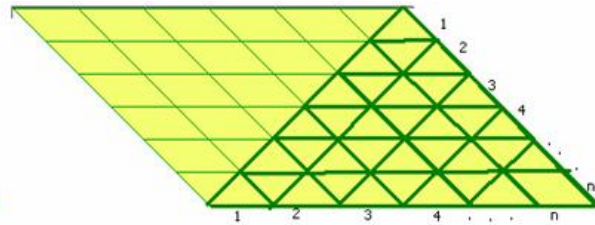
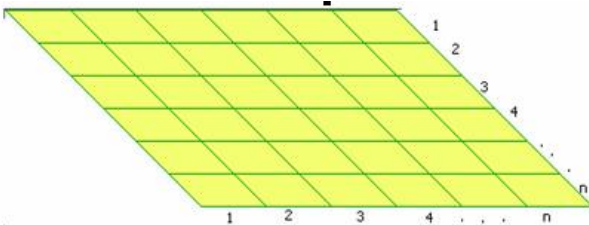


$$PV / PQ = VL / QR \quad PV = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^{n-1}$$

**8) Suma primelor n numere naturale impare**

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Demonstrație



$$? \triangle = ? \text{parallelogram}$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$$