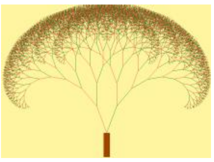
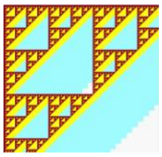
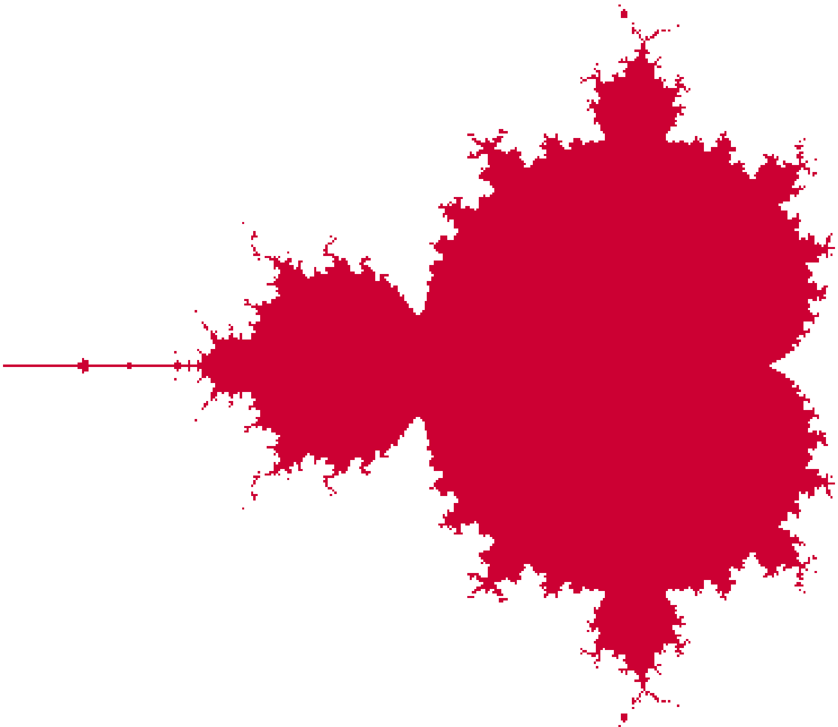


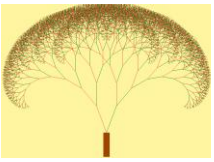


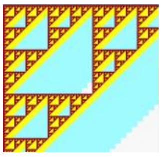


ALGORITMI
NUMERE
ŞI FRACTALI

Studiu introductiv

LUMINIȚA DOMINICA MOISE



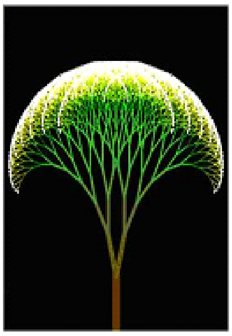


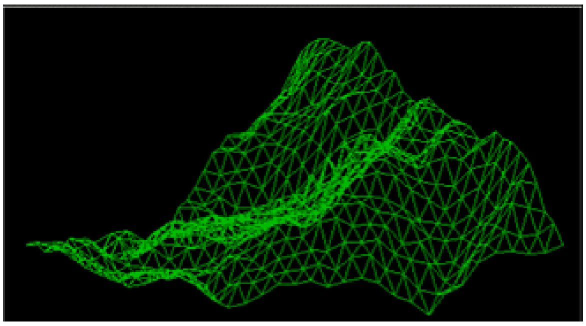
1. Ce sunt fractalii?

Geometria fractalilor este un nou limbaj utilizat pentru a descrie, modela şi analiza formele complexe din natură. Dacă elementele tradiționale ale limbajului geometriei euclidiene sunt forme vizibile ca: drepte, cercuri, sfere, noul limbaj nu conduce la o observație directă. Elementele sale sunt algoritmi care pot fi transfomați în forme şi desene numai cu ajutorul calculatoarelor. Algoritmul ne oferă un instrument descriptiv puternic de exemplu, dacă un astfel de limbaj ar fi formalizat – spun specialiştii – am putea descrie formarea unui nor tot atât de simplu şi precis ca un arhitect care descrie o casă utilizând elementele geometriei tradiționale.

Pot fi imaginate figuri geometrice diferite de cele formate din segmente, curbe sau suprafețe. Unele dintre aceste obiecte aparțin unui spațiu cu dimensiuni fracționare cuprinse între 1 şi 2, deci structuri între linie şi suprafață. Şi nu doar imaginația noastră crează aceste obiecte, exemple pot veni şi din mediul înconjurător.

Doar cu geometria clasică nu putem modela forme precum țărmul unei mări, fulgi, nori, ceață, crestele unor munți sau conturul unei păduri. Utilizând geometria fractală acest lucru este posibil. Vrem să subliniem astfel că studiind geometria fractalilor lărgim aria de cunoastere, putem descoperi noi modele ale lumii înconjurătoare cu aplicații în domenii nebănuite.





Într-un limbaj neştiințific, fractalul poate fi explicat ca o formă geometrică fragmentabilă care poate fi divizată în părți, fiecare parte fiind o copie mai mică a întregului. Termenul provine din latinescul 'fractus' care înseamnă rupt sau fracturat.

Fractalii geometrici creează imagini şi exprimă efectele iterației, în fiecare moment imaginea se schimbă, devine alta supusă aceluiaşi algoritm. Un obiect fractal este mai dificil de surprins din cauza complexității sale necesitând din partea observatorului un efort imaginativ, o participare mentală de natura unui proces nesfârşit ; limita procesului este chiar obiectul fractal căutat.

Această formă geometrică deosebită are **trei proprietăți principale**:

- este un obiect **autosimilar** (conform acestei proprietăți, o parte din structura sa seamănă cu întregul. Orice decupare la o scară oarecare sau anume aleasă, aduce în fața ochilor noştri aceeaşi "informație", ne dezvăluie acelaşi aspect).
- are o **dimensiune fracționară** ;
- are o **definiție** simplă şi **recursivă.**

***

Pentru a întelege definiția anterioara vom exemplifica prin fractalii **triunghiul lui Pascal (triunghiul lui Sierpinski) şi prin covorul lui Sierpinski.**

2. Triunghiul lui Pascal sau ce putem face cu doar două numere şi un algoritm

Pornind de la: 1 / 1   1   generăm un triunghi

Creăm mereu câte o nouă linie punând în extremități 1 şi adunând cele două numere aflate în stânga şi în dreapta .

Completați după acest algoritm triunghiul anterior !

```
                  1
                1   1
              1   2   1
            1   3   3   1
          1   4   6   4   1
        1   5  10  10   5   1
      1   6  15  20  15   6   1
    1   7  21  35  35  21   7   1
```

....

....

....

....

....

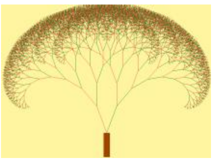
....

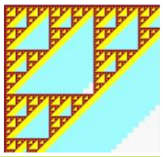
....

Putem continua astfel oricât de mult dorim. Obținem aşa-numitul triunghi al lui Pascal, numerele rezultate având o interpretare în teoria combinărilor, dar nu acest aspect ne interesează acum. De fapt aici ne interesează doar dacă numerele astfel calculate sunt impare, deoarece vom vizualiza numerele impare prin sfere pentru a creea o imagine Observăm că dacă înlocuim numerele pare cu 0 şi pe cele impare cu 1 regula de generare a triunghiului devine :

- număr par + număr par = număr par ; deci 0 + 0 = 0;
- număr par + număr impar = număr impar ; deci 0 + 1 = 1 ; 1 + 0 = 1;
- numă impar + număr impar = număr par ; deci 1 + 1 = 0.

Avem următorul tabel care sintetizează cele de mai sus :





+	0	1
0	0	1
1	1	0

Observație : Noua regulă de adunare este adunarea modulo 2. Rezultatul „adunării”

numerelor a şi b este restul împărțirii lui a+b la 2.

Completati ultimile două linii din tabelul următor:

														1														
													1		1													
												1		0		1												
											1		0		0		1											
										1		1		0		1		1										
									1		0		1		1		2		1									
								1		0		0		0		0		0		1								
							1		1		0		0		0		0		1		1							
						1		0		1		0		0		0		1		0		1						
					1		1		1		1		0		0		1		1		1		1					
				1		0		0		0		1		0		1		0		0		0		1				
			1		1		0		0		1		1		1		1		0		0		1		1			
		1		1		1		0		1		0		0		0		1		0		1		0		1		
	1																										1	
1																												1

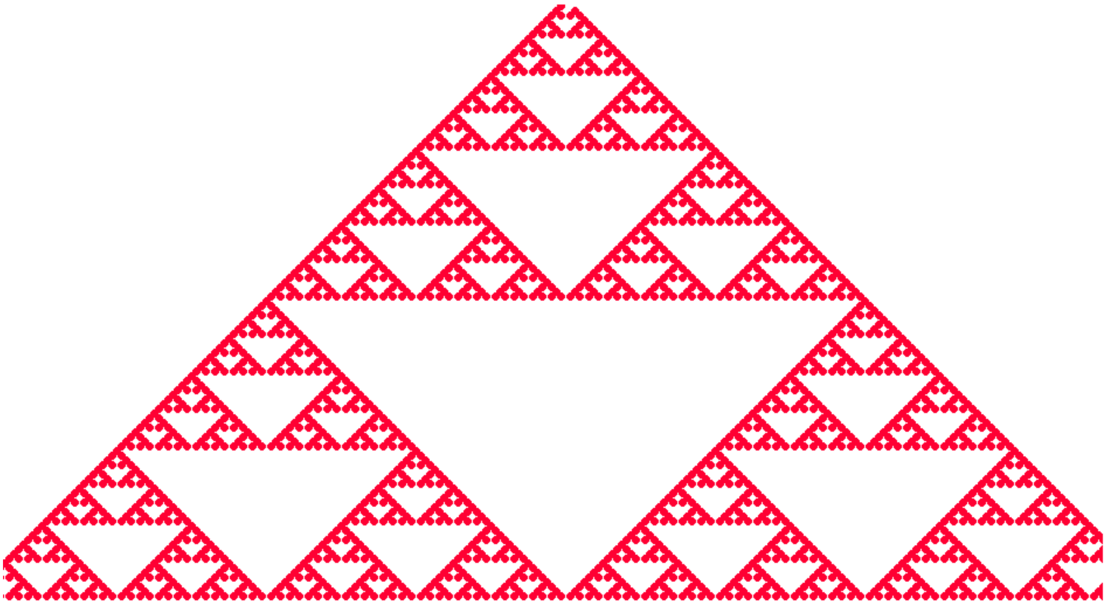
Desenând în locul numerelor de 1 discuri (cercuri pline) de rază suficient de mică rezultă o imagine numită

<u>triunghiul lui Sierpinski</u>.

Colorați imaginea urmatoare

1
1 1
1 0 1
1 1 1 1
1 0 0 0 1
1 1 0 0 1 1
1 0 1 0 1 0 1
1 1 1 1 1 1 1 1
1 0 0 0 0 0 0 0 1

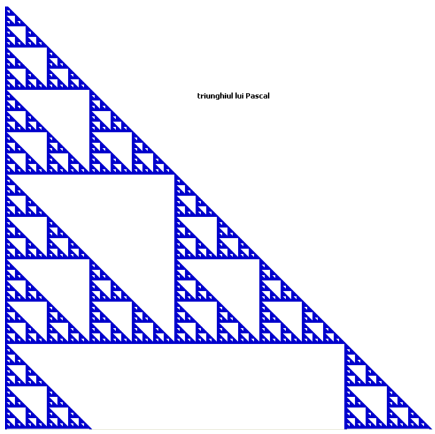
Mai exact, dacă am continua am obține:



Observație:

Dacă aliniem numerele din triunghiul lui Pascal altfel obținem imaginea următoare:

1								
1	1							
1	0	1						
1	1	1	1					
1	0	0	0	1				
1	1	0	0	1	1			
1	0	1	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	0	0	0	1



3. Triunghiul lui Pascal modulo n

Dacă n este un număr prim, putem generaliza construcția de la punctul anteior a triunghiului lui Pascal modulo 2 astfel: reprezentăm în triunghiul lui Pascal punctele corespunzătoare numerelor care nu se divid la n (n=2 a fost cazul anterior)

3.1 Triunghiul lui Pascal modulo 3

Mai simplu generam triunghiul lui Pascal modulo 3 utilizand operatia de adunare modulo 3. Noua regula de adunare este adunarea modulo 3. Rezulatul „adunarii” numerelor a si b este restul impartirii la 3 a lui a+b .

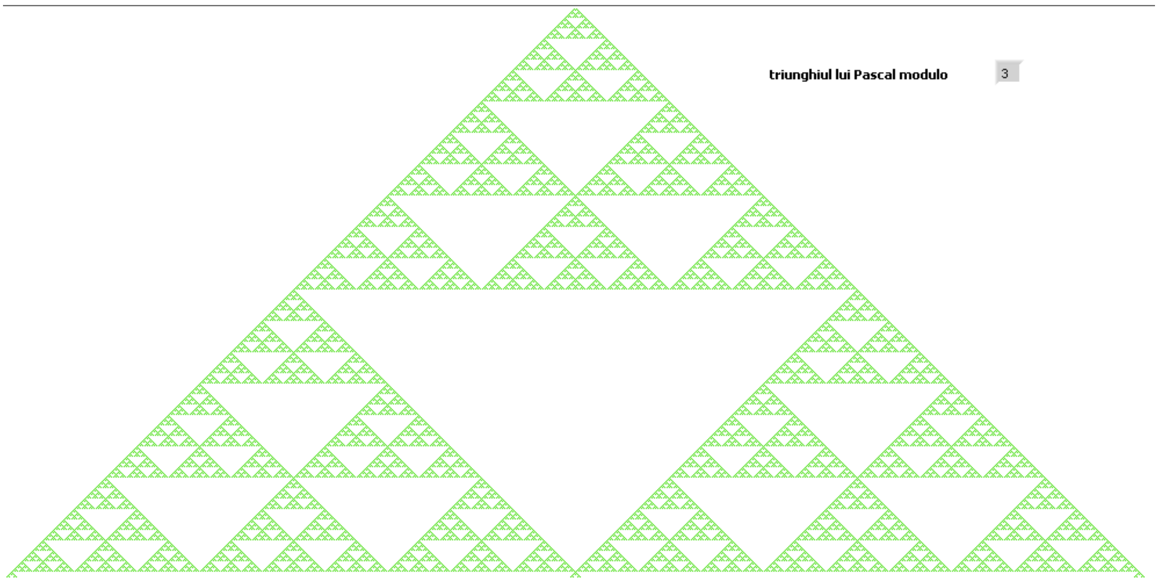
Sa generam tabelul operatiei de adunare modulo 3

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Completati triunghiul lui Pascal modulo 3!

														1														
													1		1													
												1		0		1												
											1		0		0		1											
										1		1		0		1		1										
									1		0		1		1		2		1									
								1		0		0		0		0		0		1								
							1		1		0		0		0		0		1		1							
						1		0		1		0		0		0		1		0		1						
					1		1		1		1		0		0		1		1		1		1					
				1		0		0		0		1		0		1		0		0		0		1				
			1		1		0		0		1		1		1		1		0		0		1		1			
		1		1		1		0		1		0		0		0		1		0		1		0		1		
	1																										1	
1																												1

Ar trebui sa obtineți după colorarea pătratelor cu cifrelor nenule o parte din imaginea următoare:



3.2 Triunghiul lui Pascal modulo 5

Noua regulă de adunare este adunarea modulo 5.

Rezulatul „adunării” numerelor a şi b este restul împarțirii la 5 a lui a+b.

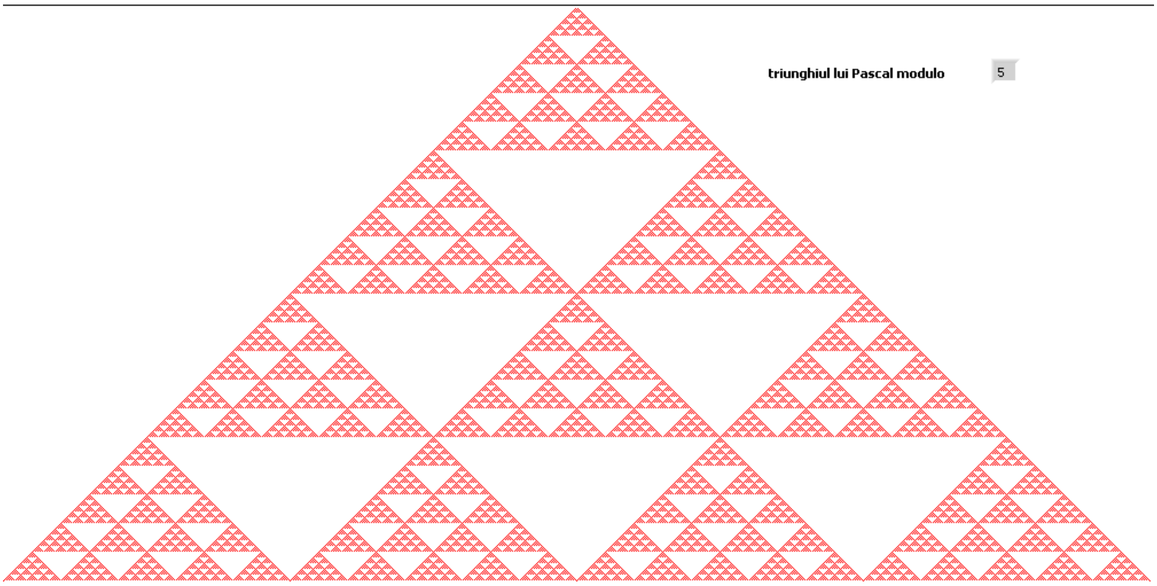
Generați tabla operatiei de adunre modulo 5.

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Completați triunghiul lui Pascal modulo 5!

														1														
													1		1													
												1		2		1												
											1		0		0		1											
										1		1		0		1		1										
									1		2		1		1		2		1									
								1		0		0		2		0		0		1								
							1														1							
						1																1						
					1																		1					
				1																				1				
			1																						1			
		1																								1		
	1																										1	
1																												1

Desenați in continuare peste cifrele nenule cercuri de raza mica. Ar trebui să obtineți o parte din imaginea urmatoare:



3.3 Triunghiul lui Pascal modulo 7

Noua regula de adunare este adunarea modulo 7.

Rezultatul „adunării” numerelor a si b este restul impartirii la 7 a lui a+b .

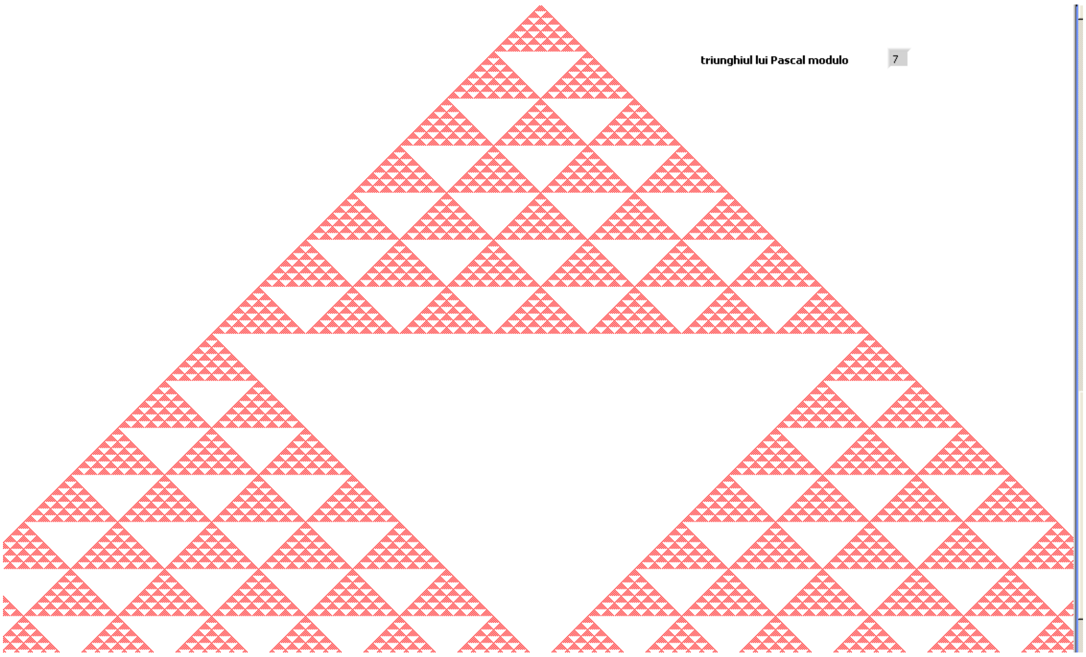
Generați tabla operatiei de adunare modulo 7.

+	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

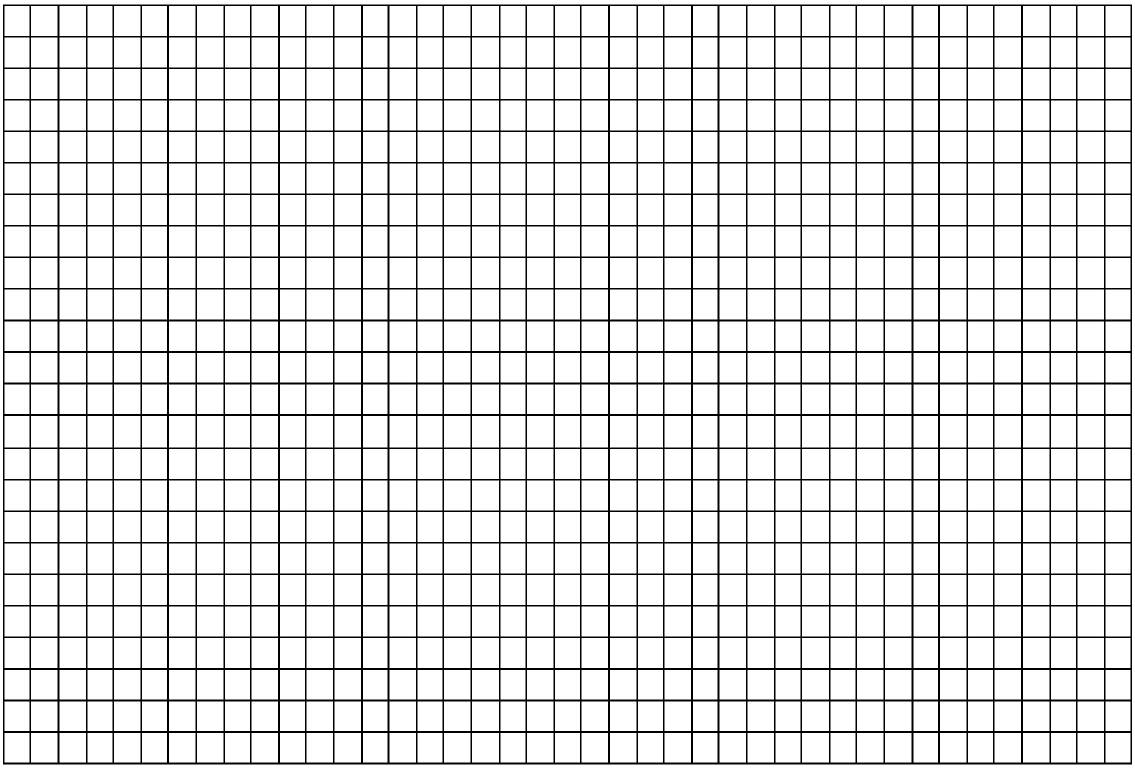
Completați triunghiul lui Pascal modulo 7.

Desenati in continuare peste cifrele nenule cercuri de raza mica

Ar trebui să obtineți o parte din imaginea următoare:



1



Concluzie

Am respectat un algoritm dupa o regulă de "adunare" generând dintr-o linie de numere o altă linie într-un proces repetitiv, iterativ. Au rezultat imagini care surprind printr-un altfel de " repetitivitate" a modelului. Porțiuni din imagine seamănă cu întregul din care face parte.

Deci, acceptând faptul că aceate imagini ilustrează noțiunea de fractal, întelegem proprietățile de **generare recursiva** şi de **auto-similitudine** enunțate la început.

A mai rămas să înțelegem de ce se numesc "fractali" , adică ce înseamnă **dimensiune fracționară.** Pentru aceasta vom genera triunghiul lui Sierpinski şi covorul lui Sierpinski (doi fractali clasici) de fapt un procedeu geometric de generare a unor imagini ca cele anterioare.

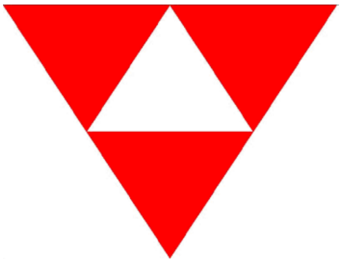
4. Triunghiul lui Sierpinski sau magia puterilor lui 3

Considerăm un triunghi căruia îi vom aplica următoarea transformare (repetitivă): **"eliminăm" triunghiul definit de mijloacele laturilor**.

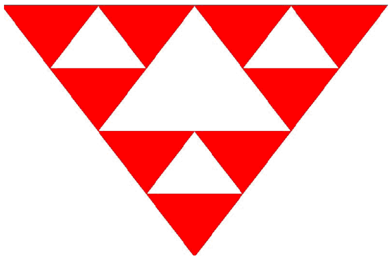
- Acesta a fost primul pas .
- La pasul al doilea, aplicăm aceeaşi transformare fiecăruia din cele trei triunghiuri rămase.
- La pasul al treilea, aplicăm aceeaşi transformare fiecăruia din cele noua triunghiuri rămase.

Triunghiul lui Sierpinski este mulțimea punctelor rămase după ce repetăm transformarea de mai sus de o infinitate de ori.

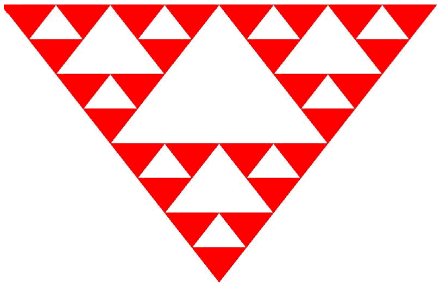
Pas 1



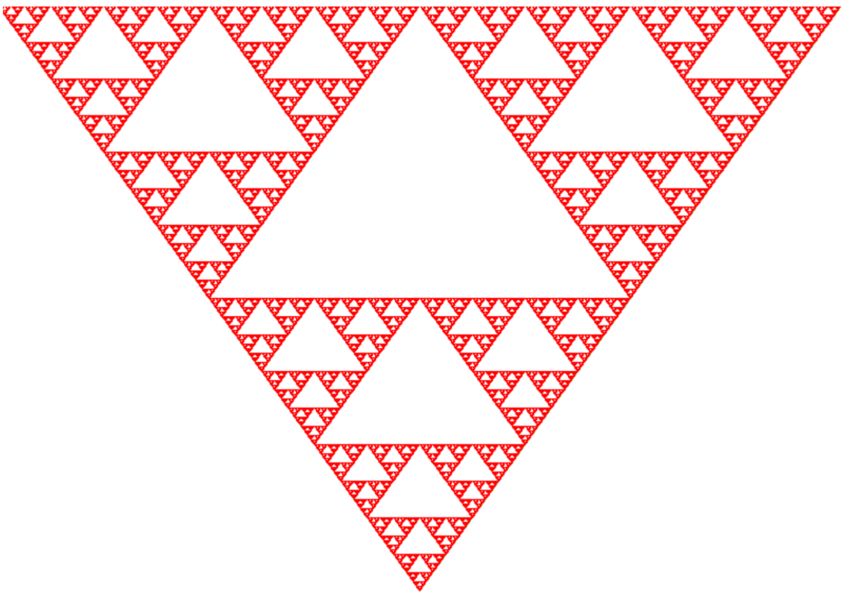
pas2



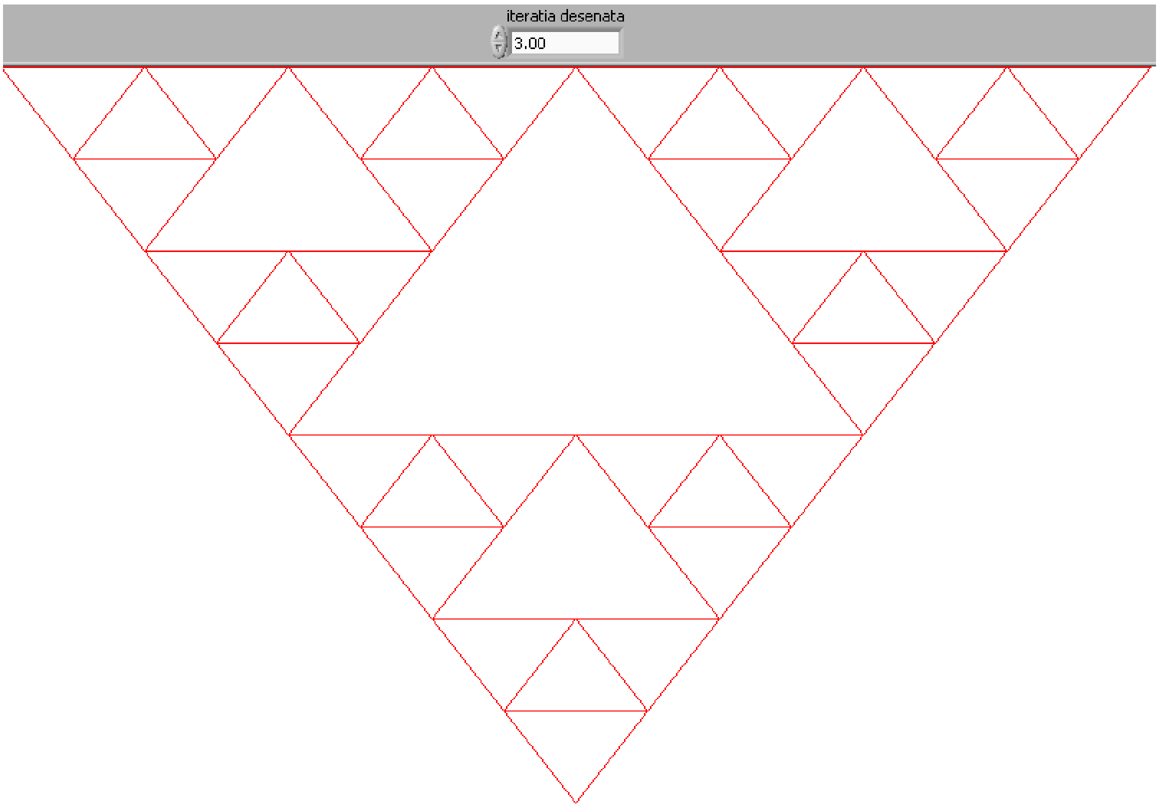
pas3



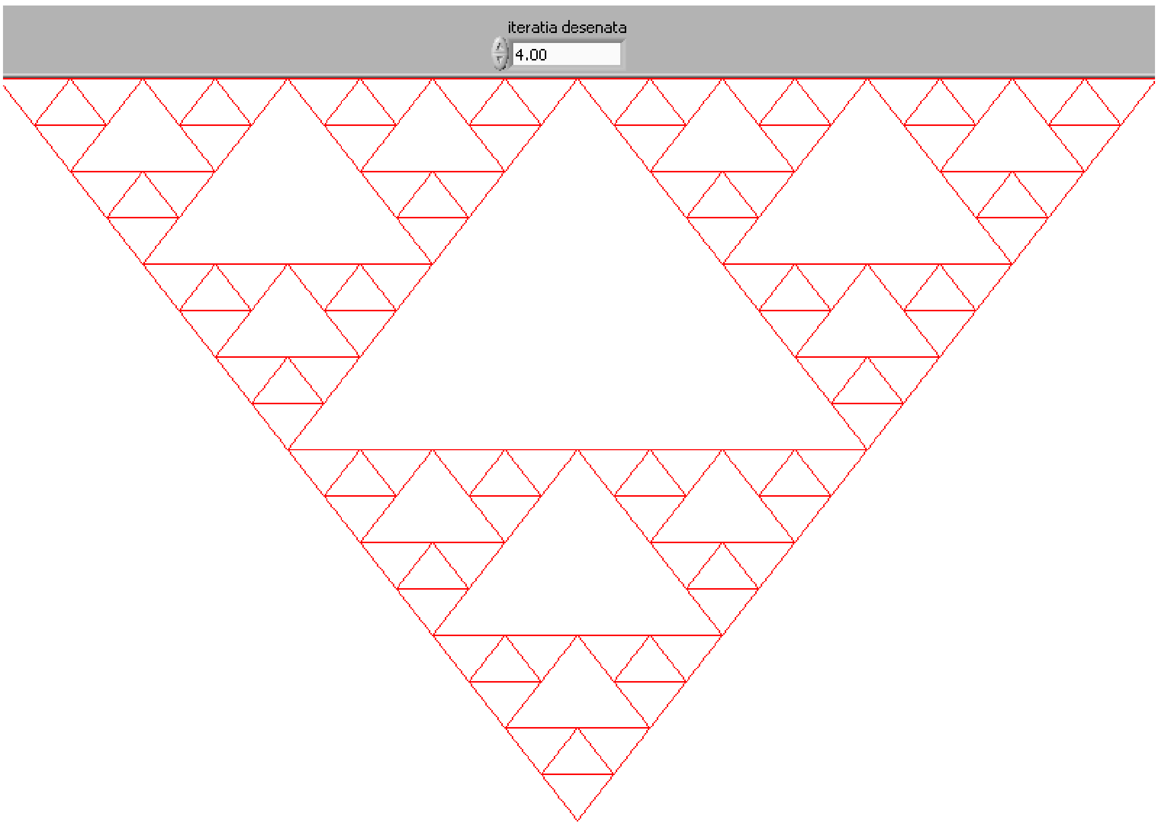
pasul 8



Colorează şi tu triunghiurile rămase la pasul 3!



Ce triunghiuri rămân la pasul4 ? Coloreaza triunghiurile ramase !



Să calculăm aria suprafeței rămase la fiecare iterație .

Dacă latura unui triunghi echilateral este *l*, reamitim că aria triunghiului este $l^2\sqrt{3}/4$

Iterați a	**Număr de triunghiuri rămase**	**Lungimea laturii unui triunghi**	**Aria suprafeței rămase**
0	1	L	$l^2\sqrt{3}/4$
1	3	l/2	$\frac{3}{4}\, l^2 \sqrt{3}/4$
2	3^2	$l/2^2$	$(\frac{3}{4})^2\, l^2\sqrt{3}/4$
3	3^3	$l/2^3$	$(\frac{3}{4})^3\, l^2\sqrt{3}/4$
n	3^n	$l/2^n$	$(\frac{3}{4})^n\, l^2\sqrt{3}/4$

Constatăm că aria se înmulțeşte cu factorul de scalre ¾ . Intuitiv prin trecere la limită aria suprafeței devine 0. Ce suprafață mai este aceea care are aria 0 ?

5. Covorul lui Sierpinski sau magia puterilor lui 8

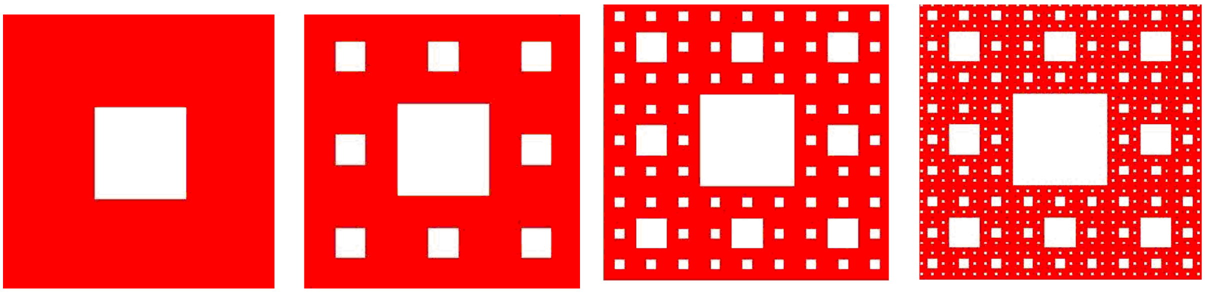
Plecăm de la un pătrat căruia îi vom aplica următoarea transformare (repetitivă):

Fiecare latură a patratului se împarte în trei părți egale

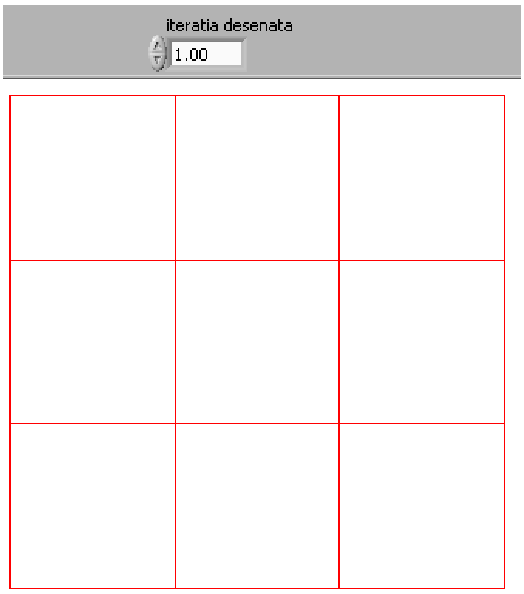
Împărțim astfel pătratul în 9 pătrate egale, fiecare având latura de 3 ori mai mică decât a celui inițial. Eliminăm acum pătratul din mijloc.

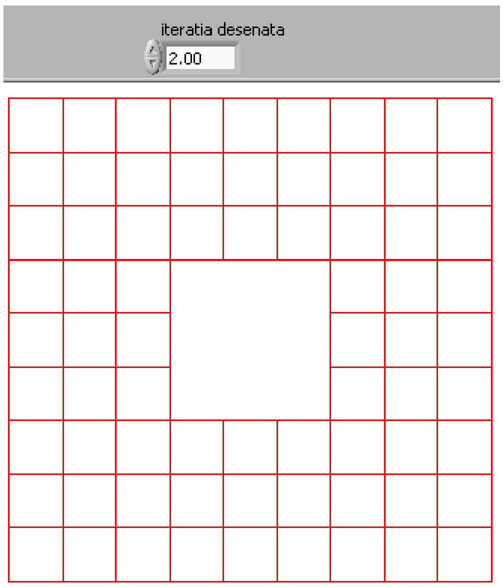
- Acesta a fost primul pas.
- La pasul doi, aplicăm aceeaşi transformare fiecăruia dintre cele 8 pătrat rămase
- La pasul trei aplicăm aceeaşi transformare fiecăruia dintre cele 8^2 pătrate rămase.

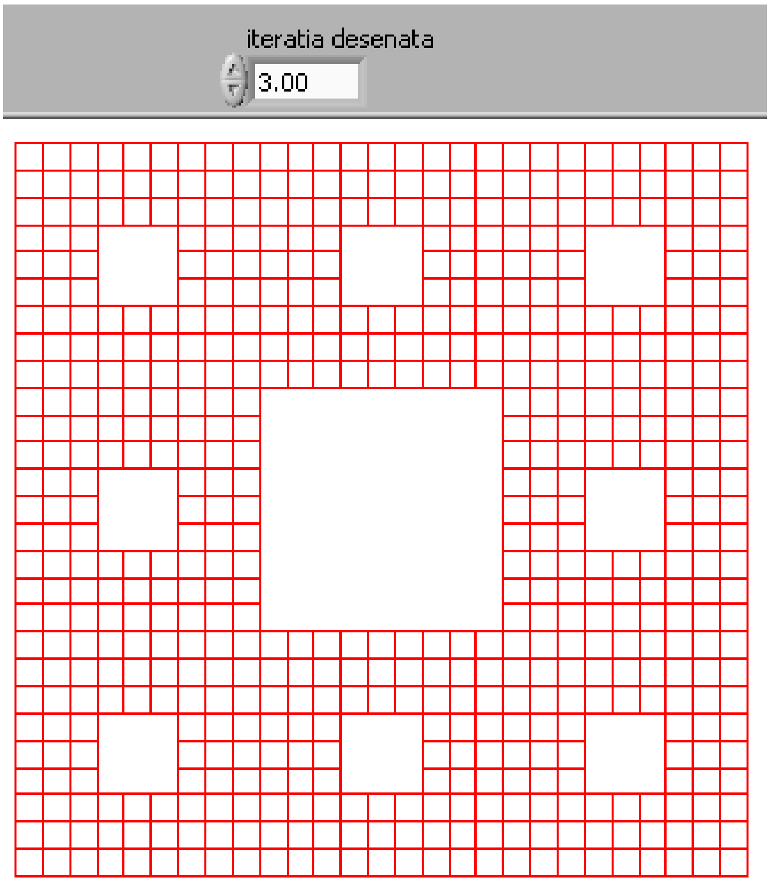
Covorul lui Sierpinski este mulțimea de puncte rămase după ce repetăm procedeul de mai sus de o infinitate de ori.



Colorează şi tu pătratele rămase !







Să calculăm aria suprafeței rămase la fiecare iterație. Dacă latura unui pătrat este *l*, reamitim ca aria patratului este l^2

Iterati a	**Număr de pătrate rămase**	**Lungimea laturii unui pătrat**	**Aria suprafeței Rămase**
0	1	L	l^2
1	8	l/3	$8/9\ l^2$
2	8^2	$l/3^2$	$(8/9)^2\ l^2$
3	8^3	$l/3^3$	$(8/9)^3\ l^2$

n	8^n	$l/3^{\,n}$	$(8/9)^n\, l^2$

Constatăm că aria se înmulteşte cu factorul de scalare 8/9 . Intuitiv prin trecere la limită aria suprafeței devine 0. Ce suprafață mai este aceea care are aria 0 ?

6. Fractalii au dimensiuni fractionare

Putem vorbi la fractalii geometrici de dimensiunea fracționară în următorul mod: acceptăm că dreapta are o dimensiune (lungimea), planul are două dimensiuni (lungime şi lățime) şi spațiul trei dimensiuni (lungime, lățime , înălțime) noțiuni întipărite prin calculele facute în şcoala elementară la perimetre, arii, volume. Cu acestea reamintite, ce ar fi triunghiul lui Sierpinski, lungime sau suprafață?

Pornim de la un triunghi şi ajungem la o imagine atât de franjurată încât ideea pe care o avem depre suprafața nu corespunde, dar nici cea de dreaptă nu se potriveşte . Avem o dimensiune sau două? Intuiția şi simțul nostru matematic nu pot să decidă . De aceea putem accepta ca in acest moment trbuie definit un concept de dimensiune conform caruia fractalul triunghiul lui Sierpinski sa aiba o dimensiune un numar intre 1 si 2.

***

„ Dimensiunea'' nu este uşor de înțeles. La începutul secolului trecut era una din problemele majore ale matematicii. Ce înseamnă această noțiune şi ce proprietăți are ? Situația era cu atât mai dificilă cu cât se dezvoltaseră 10 noțiuni diferite de dimensiune: dimensiunea topologică, Hausdorff, dimensiunea fractală, dimensiunea auto-similarității, dimensiunea euclidiană şi altele. Ele sunt de fapt conexe si în anumite situații coincid

In cazul fractalilor geometrici in schimb se poate defini notiunea de dimensiune a auto-similaritati, notiune care necesita doar intelegera propriatilor caracteristice frcalilor si functia logaritm.

7. Test

1) Care dintre imaginile următoare nu poate fi modelată de doar cu geometria clasica?

a)  b)  c) 

2) Care dintre numerele următoare poate fi dimensiunea unuia dintre fractalii geomerici prezentați ?

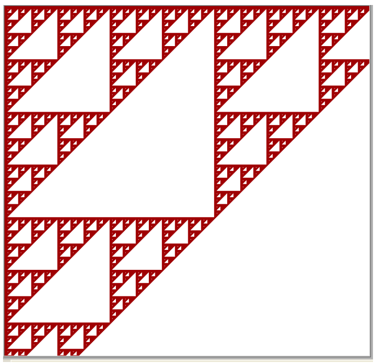
a) 1 b) 1,585 c) 2

3) În adunarea modulo 3 1+2 are rezultatul:

a) 0 b) 1 c) 2

4) Imaginea alăturată este un fractal geometric numit

a) covorul lui Coch
b) covorul lui Sierpinski
c) triunghiul lui Sierpinski



5) Una dintre proprietățile următoare nu este caracteristică unui fractal.

a) autosimilitudine b) netezime c) generare recursivă

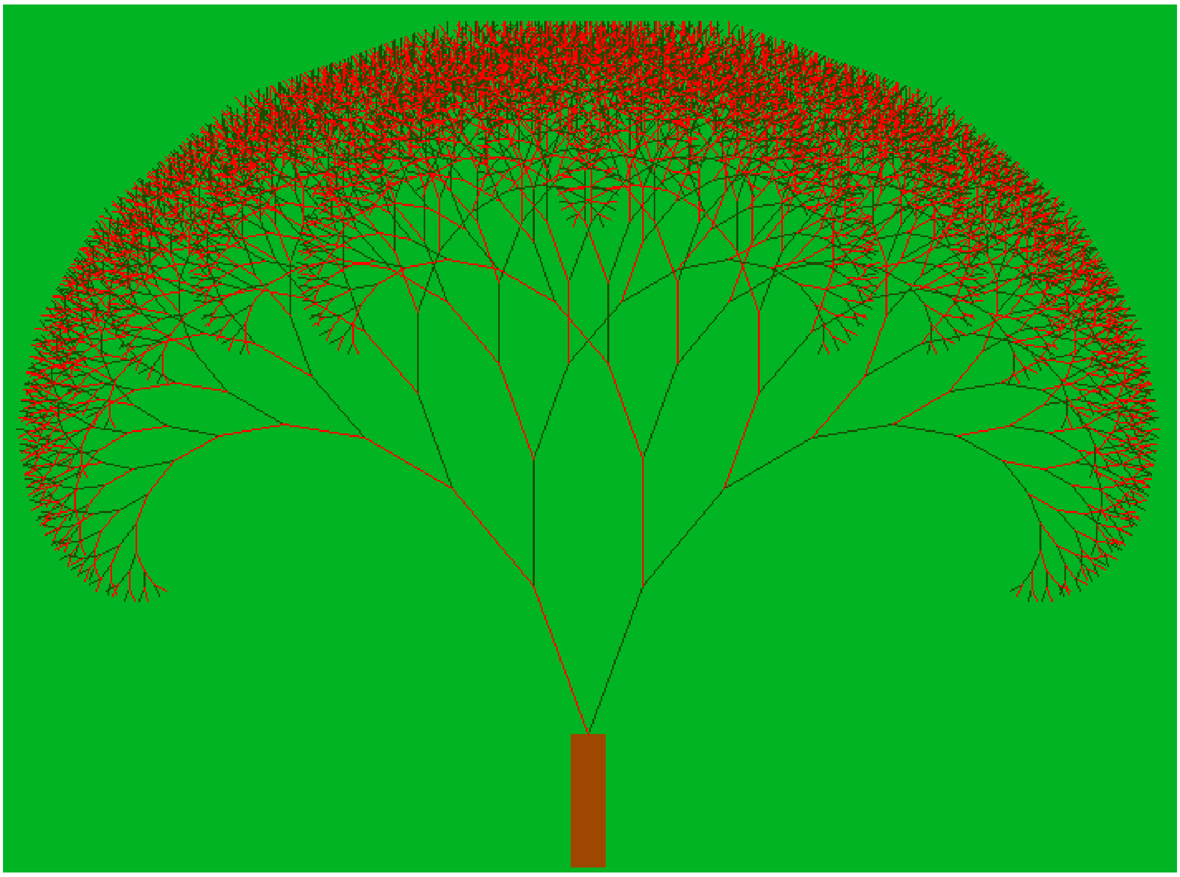
Rezultat testului 1a) 2b) 3a) 4 c) 5) b

8. Bibliografie

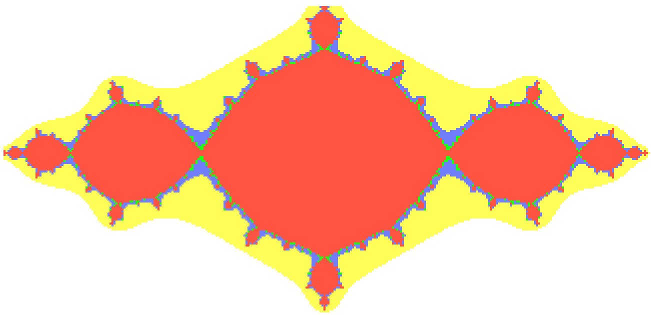
[1] Michael F. Barnsley, Fractals everywhere second edition, Academic Press Professional, 1993

[2] D.L.Moise, B. Bogdan, D. Druță, Algoritmi, numere şi fractali, editura Printech , 2007

Cuprins



fractalul copac



Multime Julia